FUNÇÃO DE RENOVAMENTO DO CICLO DE OCUPAÇÃO DA FILA DE ESPERA M | G | ¥

THE M | G | ¥ QUEUE BUSY CYCLE RENEWAL FUNCTION

Autor: Manuel Alberto M. Ferreira
- Professor Associado - I.S.C.T.E.

***RESUMO*:**

- Neste trabalho apresentamos fórmulas para o cálculo da função de renovamento do ciclo de ocupação da fila de espera M|G|∞. O seu valor em t dá o número médio de períodos de ocupação que se iniciam em $[0,t]$. Consideramos distribuições de serviço para as quais a função de renovamento é dada por uma expressão simples e outras para as quais ela é mais complicada, nomeadamente: exponencial, NBUE (New Better Than Used in Expectation), NWUE (New Worse Than Used in Expectation), DFR (Decreasing Failure Rate), IMRL (Increasing Mean Residual Life) e potência.

***PALAVRAS-CHAVE*:**

- *M|G|¥, ciclo de ocupação, função de renovamento.*

ABSTRACT:

- In this paper we present formulas to compute the busy cycle renewal function for the M|G|∞ queue. It's value in t gives the mean number of busy periods that begin in $[0,t]$. We consider service time distributions for wich the renewal function is given for a simple expression and others for wich it is more complicated, namely: exponential, NBUE (New Better Than Used in Expectation), NWUE (New Worse Than Used in Expectation), DFR (Decreasing Failure Rate), IMRL (Increasing Mean Residual Life) and power function.

KEY-WORDS:

- *M|G|¥, busy cycle, renewal function.*

1. INTRODUÇÃO

No sistema de fila de espera M|G|∞, λ é a taxa do processo de Poisson de chegadas dos clientes, cada cliente recebe um serviço cuja duração é uma variável aleatória positiva com função de distribuição $G(\cdot)$ e média α, tendo-se $\alpha = \int_0^\infty [1 - G(t)]dt$, há infinitos servidores e o serviço de cada cliente é independente dos outros clientes e do processo de chegadas. A intensidade de tráfego é dada por $\rho = \lambda\alpha$.

Num sistema de fila de espera costuma-se designar por período de ocupação um período que se inicia quando um cliente chega ao sistema estando ele vazio, termina quando um cliente o abandona deixando-o vazio, e em que há sempre pelo menos um cliente presente. Assim, num sistema de fila de espera, há uma sucessão de períodos de desocupação e de períodos de ocupação.

Seja o sistema M|G|∞ com origem dos tempos a coincidir com o início de um período de ocupação. Os instantes $0, t_1, t_2, \ldots$ em que se inicia um período de ocupação, são os instantes de chegada de um processo de renovamento (Takács, 1962). Diremos que um ciclo está completo sempre que ocorre um renovamento, isto é: um início de um período de ocupação. Chamaremos a esses ciclos, ciclos de ocupação, e a sua duração é uma variável aleatória que designaremos por *Z*.

Então,

$$\boxed{Z = B + I} \qquad \textbf{(1.1)}$$

em que *B* é a duração do período de ocupação e *I* a do período de desocupação.
(Takács, 1962) mostrou que B e I são estocasticamente independenes e, ainda, que a transformada de Laplace-Stieltjes de *Z*, $\overline{Z}(s)$, é dada por

$$\boxed{\overline{Z}(s) = 1 - \frac{1}{(s+\lambda)P_{00}(s)}} \qquad \textbf{(1.2),}$$

em que $P_{00}(s)$ é a transformada de Laplace-Stieltjes de $p_{00}(t) = e^{-\lambda\int_0^t [1-G(v)]dv}$, probabilidade de o sistema estar desocupado no instante t dado que inicialmente está desocupado.

Aquele autor mostrou no mesmo trabalho que

$$\boxed{E[Z] = \frac{e^{\rho}}{\lambda}} \quad \textbf{(1.3)}$$

e

$$\boxed{E\left[Z^2\right] = 2\lambda^{-1}e^{2\rho}\int_0^{\infty}\left(e^{-\lambda\int_0^t[1-G(v)]dv} - e^{-\rho}\right)dt + 2\lambda^{-2}e^{\rho}} \quad \textbf{(1.4).}$$

Sendo I exponencialmente distribuída com parâmetro λ a Transformada de Laplace-Stieltjes de I é dada por $\overline{I}(s) = \frac{\lambda}{\lambda + s}$ e o quociente $\frac{\overline{Z}(s)}{\overline{I}(s)}$ conduz à expressão $\overline{B}(s) = 1 + \frac{1}{\lambda}\left[s - \frac{1}{P_{00}(s)}\right]$ para a Transformada de Laplace-Stieltjes de B (Stadje (1985)), cuja inversão é um problema complexo excepto para distribuições de serviço particulares (ver (Ferreira, 1991, 1995, 1998)).

Neste trabalho o estudo vai centrar-se no ciclo de ocupação da fila de espera M|G|∞, concretamente no estudo da sua função de renovamento.

2. FUNÇÃO DE RENOVAMENTO DO CICLO DE OCUPAÇÃO DA FILA DE ESPERA M | G | ¥

A função de renovamento, *R*, de um processo de renovamento é dada por $R = 1 + F + F^{*2} + F^{*3} + \ldots$, em que F^{*n} é a função de distribuição da convolução *n* vezes por ele próprio do tempo entre renovamentos (ver, por exemplo, (Çinlar, 1975)). Dá o número médio de renovamentos em $[0,t]$. No caso do ciclo de ocupação a função de renovamento dá o número médio de períodos de ocupação que se iniciam em $[0,t]$.

Para calcular a função de renovamento no caso do ciclo de ocupação da fila de espera M|G|∞ notemos que passando à Transformada de Laplace-Stieltjes,

$$\overline{R}(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s}\overline{Z}(s) + \frac{1}{s}\overline{Z}^{\,2}(s) + \ldots + \frac{1}{s}\overline{Z}^{\,n}(s) + \ldots = \frac{s^{-1}}{1-\overline{Z}(s)} = \frac{s^{-1}}{1 - 1 + \frac{1}{(s+\lambda)P_{00}(s)}} =$$

$$= \frac{(s+\lambda)P_{00}(s)}{s} = P_{00}(s) + \lambda \frac{1}{s} P_{00}(s).$$ So, $R(t) = p_{00}(t) + \boldsymbol{l} \int_0^t p_{00}(u)du$,

ou seja:

$$\boxed{R(t) = e^{-l\int_0^t [1-G(v)]dv} + \boldsymbol{l}\int_0^t e^{-l\int_0^m [1-G(v)]dv} du} \qquad \textbf{(2.1)}$$

Note-se que:

$$\lim_{t\to\infty}\left[R(t) - \frac{\lambda}{e^{\rho}}t\right] =$$

-

$$= \lim_{t\to\infty}\left[e^{-\lambda\int_0^t [1-G(v)]dv} + \lambda e^{-\rho}\int_0^t e^{\rho-\lambda\int_0^{\mu}[1-G(v)]dv} du - \frac{\lambda}{e^{\rho}}t\right] =$$

$$= e^{-\rho} + \lambda e^{-\rho} \lim_{t\to\infty} \int_0^t \left(e^{\rho-\lambda\int_0^{\mu}[1-G(v)]dv} - 1\right)du =$$

$$= e^{-\rho} + \lambda e^{-\rho}\int_0^{\infty}\left(e^{\lambda\int_u^{\infty}[1-G(v)]dv} - 1\right)du.$$

Então, facilmente se mostra que:

$$\boxed{\lim_{t\to\infty}\left[R(t) - \frac{t}{E[Z]}\right] = \frac{VAR[Z] + E^2[Z]}{2E^2[E]}} \qquad \textbf{(2.2),}$$

como tem que acontecer com a função de renovamento.

- Como $e^{-r} \le p_{00}(t) \le 1$,

$$\boxed{p_{00}(t) + \boldsymbol{l}e^{-r}t \le R(t) \le p_{00}(t) + \boldsymbol{l}t} \qquad \textbf{(2.3)}$$

e, ainda,

$$\boxed{e^{-r}\left(1+\boldsymbol{l}t\right)\leq R(t)\leq 1+\boldsymbol{l}t} \qquad \textbf{(2.4),}$$

concluindo-se que

$$\boxed{\lim_{a\to 0} R(t)=1+\boldsymbol{l}t} \qquad \textbf{(2.5),}$$

o que é inteiramente lógico visto que, quando o tempo de serviço é nulo, cada cliente que chega inicia um período de ocupação. E as chegadas, no sistema M|G|∞, dão-se de acordo com um processo de Poisson de taxa $\boldsymbol{l}$.

- $$\frac{d}{dt}R(t)=p_{00}(t)\left(-\boldsymbol{l}\left(1-G(t)\right)\right)+\boldsymbol{l}p_{00}(t)=\boldsymbol{l}G(t)p_{00}(t)\geq 0\,.$$

Portanto $R(t)$ é uma função não decrescente de t.

3. VALORES DE *R*(*t*) PARA ALGUMAS DISTRIBUIÇÕES DE SERVIÇO PARTICULARES

Vejamos agora sistemas M|G|∞ para os quais é possível obter expressões simples para $R(t)$:

$$G(t)=\frac{e^{-\rho}}{e^{-\rho}+\left(1-e^{-\rho}\right)e^{-\lambda t}},t\geq 0\,.$$

$$e^{-\lambda\int_0^t[1-G(v)]dv}=e^{-\rho}+\left(1-e^{-\rho}\right)e^{-\lambda t}$$

Então, a partir da expressão (2.1) obtém-se $R(t)=1+\lambda e^{-\rho}t$.

Em coerência com este resultado, mostra-se facilmente que, para este sistema, Z é exponencialmente distribuída com taxa $\lambda e^{-\rho}$ e, ainda, que

$$R(t) - \lambda e^{-\rho} t - \frac{\mathrm{VAR}[Z] + E^2[Z]}{2E^2[Z]} = 0, \ \ t \geq 0 .$$

Para esta distribuição de serviço, B é uma mistura de uma variável aleatória degenerada na origem, com coeficiente $e^{-\rho}$, com uma exponencial de parâmetro $\lambda e^{-\rho}$, com coeficiente $1 - e^{-\rho}$ (Ferreira, 1991).

$$G(t) = \begin{cases} 0, & t < \alpha \\ 1, & t \geq \alpha \end{cases} \text{ (serviço constante de valor } \alpha \text{)},$$

$$p_{00}(t) = \begin{cases} e^{-\lambda t}, & t < \alpha \\ e^{-\rho}, & t \geq \alpha \end{cases} .$$

Portanto, $R(t) = \begin{cases} 1, & t < \alpha \\ 1 + \lambda e^{-\rho}(t - \alpha), & t \geq \alpha \end{cases}$.

Neste caso conclui-se ainda que

$$R(t) - \lambda e^{-\rho} t - \frac{\mathrm{VAR}[Z] + E^2[Z]}{2E^2[Z]} = 0, \ \ t \geq \alpha .$$

$$G(t) = 1 - \frac{1}{1 - e^{-\rho} + e^{-\rho + \frac{\lambda}{1 - e^{-\rho}} t}}, \ t \geq 0 .$$

$$e^{-\lambda \int_0^t [1 - G(v)] dv} = \left(1 - e^{-\rho}\right) e^{-\lambda \frac{1}{1 - e^{-\rho}} t} + e^{-\rho} .$$

Portanto, $R(t) = e^{-\rho} + \left(1 - e^{-\rho}\right)^2 + \lambda e^{-\rho} t + e^{-\rho}\left(1 - e^{-\rho}\right) e^{-\lambda \frac{1}{1 - e^{-\rho}} t}$.

Neste caso $R(t)-\lambda e^{-\rho}t-\dfrac{\mathrm{VAR}[Z]+E^2[Z]}{2E^2[Z]}=e^{-\rho}\left(1-e^{-\rho}\right)e^{-\lambda\frac{1}{1-e^{-\rho}}t}$, $t\geq\alpha$. Esta diferença converge para zero quando t tende para infinito, e é inferior ou igual a ε para $t\geq\dfrac{1-e^{-\rho}}{\lambda}\log\dfrac{\varepsilon}{e^{-\rho}\left(1-e^{-\rho}\right)}$.

Para esta distribuição de serviço, B é exponencialmente distribuída com valor médio $\dfrac{e^{\rho}-1}{\lambda}$ (Ferreira, 1995). No entanto, Z não o é. A sua função de densidade de probabilidade é dada por $z(t)=\dfrac{\lambda}{e^{\rho}-2}\left(e^{-\frac{\lambda}{e^{\rho}-1}t}-e^{-\lambda t}\right)$, $t\geq 0$

Para o sistema M|M|∞ tem-se

$$\boxed{R^M(t)=e^{-\rho\left(1-e^{-\frac{t}{\alpha}}\right)}+\lambda e^{-\rho}\int_0^t e^{\rho e^{-\frac{u}{\alpha}}}du} \qquad \textbf{(3.1)}$$

e, em consequência,

$$\boxed{e^{-\rho\left(1-e^{-\frac{t}{\alpha}}\right)}+\lambda e^{-\rho}t\leq R^M(t)\leq e^{-\rho\left(1-e^{-\frac{t}{\alpha}}\right)}+\lambda t} \qquad \textbf{(3.2)}$$

Comparando a aproximação assintótica definida por (2.2) para o sistema M|M|∞ $\left(R^{Ma}(t)\right)$ com $R^M(t)$ tem-se para os valores seguintes de *t* e ρ (com $\lambda=1$):

$\lambda=1$

ρ / t	.5		1		10	
	$R^{Ma}(t)$	$R^M(t)$	$R^{Ma}(t)$	$R^M(t)$	$R^{Ma}(t)$	$R^M(t)$
1	1,3859687	1,4075578	1,2205880	1,2352980	1,1302225	1,0261824
5	3,8120913	3,8120980	2,6921058	2,6921099	1,1304041	1,1099338
10	6,8447446	6,8447444	4,5315030	4,5315030	1,1306311	1,1261263
20	12,910051	12,910051	8,2102974	8,2102974	1,1310851	1,1303416
50	31,105971	31,105971	19,246681	19,246681	1,1324471	1,1324502

t \ ρ	20		50		100	
	$R^{Ma}(t)$	$R^{M}(t)$	$R^{Ma}(t)$	$R^{M}(t)$	$R^{Ma}(t)$	$R^{M}(t)$
1	1,0559557	1,0131526	1,0208523	1,0052754	1,0102063	1,0026401
5	1,0559557	1,0556439	1,0208523	1,0197302	1,0102063	1,0097296
10	1,0559557	1,0556439	1,0208523	1,0208230	1,0102063	1,0101976
20	1,0559557	1,0559485	1,0208523	1,0208522	1,0102063	1,0102062
50	1,0559558	1,0559558	1,0208523	1,0208523	1,0102063	1,0102063

(Recorremos ao programa EUREKA porque as expressões incorporam integrais de limite infinito)

De notar que para as intensidades de tráfego mais baixas, $\rho = .5$ e $\rho = 1$, a partir de $t = 10$ $R^{MA}(t) = R^{M}(t)$ há igualdade entre R^{Ma} e $R^{M|G|¥}(t)$ com oito algarismos significativos. Para as mais elevadas, apenas a partir de $t = 50$ se verifica essa igualdade, nas mesmas circunstâncias.

Para sistemas M|G|∞ com distribuição de serviço relacionadas com a exponencial tem-se:

Serviço NBUE

Se a distribuição de serviço for NBUE de média α, $\int_t^{\infty}[1-G(v)]dv \le \int_t^{\infty} e^{-\frac{v}{\alpha}}dv$ ((Ross, 1983), pág. 273) e, portanto,

$$\boxed{R^{NBUE}(t) \le R^{M}(t)} \qquad \mathbf{(3.3)}$$

e

$$\boxed{R^{NBUE}(t) \le e^{-\rho\left(1-e^{-\frac{t}{\alpha}}\right)} + \lambda t} \qquad \mathbf{(3.4)}$$

Serviço NWUE

Se a distribuição de serviço for NWUE de média α, $\int_t^{\infty}[1-G(v)]dv \ge \int_t^{\infty} e^{-\frac{v}{\alpha}}dv$ (Ross, 1983) e

portanto,

$$\boxed{R^{NWUE}(t) \geq R^{M}(t)} \qquad \textbf{(3.5)}$$

e

$$\boxed{R^{NWUE} \geq e^{-\rho\left(1-e^{-\frac{t}{\alpha}}\right)} + \lambda e^{-\rho} t} \qquad \textbf{(3.6)}$$

Serviço DFR

Se a distribuição de serviço for DFR, $1-G(t) \geq e^{-\frac{t}{\alpha}-\frac{\gamma_s^2}{2}+\frac{1}{2}}$ ((Ross, 1983), pág. 265) sendo γ_s o coeficiente de variação de serviço. Assim,

$$\boxed{R^{DFR}(t) \leq e^{-\rho\left(1-e^{-\frac{t}{\alpha}}\right)e^{\frac{1-\gamma_s^2}{2}}} + \lambda e^{-\rho e^{\frac{1-\gamma_s^2}{2}}} \int_0^t e^{\rho e^{\frac{1-\gamma_s^2}{2}-\frac{u}{\alpha}}} du} \qquad \textbf{(3.7)}$$

Serviço IMRL

Se a distribuição de serviço for IMRL, $1-\dfrac{\int_0^t [1-G(v)]dv}{\alpha} \geq e^{-\frac{2t\alpha}{\mu_2}-\frac{2\alpha}{3\mu_2^2}\mu_3+1}$ sendo μ_r os momentos de ordem r de $G(\cdot)$ em torno da origem ((Brown, 1981) e (Cox, 1962), pág. 64),

$$\boxed{R^{IMRL}(t) \geq e^{-\rho\left(1-e^{-\frac{2t\alpha}{\mu_2}-\frac{2\alpha}{3\mu_2^2}\mu_3+1}\right)e^{\frac{1-\gamma_s^2}{2}}} + \lambda e^{-\rho} \int_0^t e^{\rho e^{-\frac{2t\alpha}{\mu_2}-\frac{2\alpha}{3\mu_2^2}\mu_3+1}} du} \qquad \textbf{(3.8).}$$

Finalmente, se a distribuição de serviço for uma função potência de parâmetro $c\left(\alpha = \dfrac{c}{c+1}\right)$ tem-se

Serviço POTÊNCIA

$$R^{P}(t)=\begin{cases} e^{-\lambda\left(t-\frac{t^{c+1}}{c+1}\right)}+\lambda\int_0^t e^{-\lambda\left(u-\frac{u^{c+1}}{c+1}\right)}du, & t\le 1\\ e^{-\rho}+\lambda\int_0^1 e^{-\lambda\left(u-\frac{u^{c+1}}{c+1}\right)}du+\lambda e^{-\rho}(t-1), & t>1\end{cases} \quad \textbf{(3.9).}$$

Mostra-se facilmente que para este sistema,

$$R^{Pa}(t)=e^{-\rho}+\lambda\int_0^1 e^{-\lambda\left(u-\frac{u^{c+1}}{c+1}\right)}du+\lambda e^{-\rho}(t-1) \quad \textbf{(3.10)}$$

Portanto, a partir de $t=1$ (3.9) é idêntica à aproximação assintótica (2.2).

Note-se que, para os sistemas M|D|∞ e com serviço dado por uma função potência, $R(t)$ é idêntica a $R^{a}(t)$ a partir do instante em que atingem as probabilidades estacionárias para o processo populacional, respectivamente $t=\alpha$ e $t=1$. Mostra-se, aliás, facilmente, que se $1-G(t)=0,\ t\ge t_1$:

$$R(t)=\begin{cases} e^{-\lambda\int_0^t[1-G(v)]dv}+\lambda\int_0^t e^{-\lambda\int_0^u[1-G(v)]dv}du, & t\le t_l\\ e^{-\rho}+\lambda\int_0^t e^{-\lambda\int_0^u[1-G(v)]dv}du+\lambda e^{-\rho}(t-t_1), & t>t_1\end{cases} \quad \textbf{(3.11)}$$

correspondendo o segundo ramo de (3.11) à aproximação assintótica (2.2).

4. CONCLUSÕES

Vimos que há três distribuições de serviço para as quais $R(t)$ é dada por uma expressão simples.

Note-se, no entanto, que no caso em que $G(t) = \dfrac{e^{-\rho}}{e^{-\rho} + \left(1 - e^{-\rho}\right)e^{-\lambda t}}$, $t \geq 0$ o processo de renovamento em estudo é um processo de Poisson. Assim, neste caso, tudo se conhece quanto à distribuição do tempo que decorre entre os inícios de dois períodos de ocupação consecutivos e também em relação à distribuição do número de períodos de ocupação que se iniciam num intervalo qualquer.

Quanto a outras distribuições de serviço demos um relevo especial à exponencial devido à importância do sistema M|M|∞ e, também, por permitir obter resultados para distribuições com ela relacionadas, muito usadas em teoria da fiabilidade.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BROWN, M., **"Further monotonicity properties for specialized renewall processes"**. Ann. Prob. 9 (1981), 891-895.

ÇINLAR, E., **"Introduction to Stochastic Processes"**. New Jersey, Prentice-Hall, Inc.. 1975.

COX, D. R., **"Renewal Theory"**. Methen London. 1962.

FERREIRA, M.A.M., "**Um sistema M|G|¥ com período de ocupação exponencial**". Actas das XV Jornadas Luso-Espanholas de Matemática, Vol. IV, Universidade de Évora. Évora. 1991.

FERREIRA, M.A.M., "**Cauda do período de ocupação da fila de espera M|G|¥**". Comunicação apresentada no III Congresso Anual da Sociedade Portuguesa de Estatística. Guimarães. 1995.

ROSS, S., **"Stochastic Processes"**. Wiley. New York. 1983.

STADJE, W., "**The busy period of the queueing systems M|G|¥**". J.A.P.. 22(1985), 697-704.

TACKÁCS. L., "**An introduction to queueing theory**". Oxford University Press. New York. 1962.