destaque
informação à comunicação social
INSTITUTO NACIONAL DE ESTATÍSTICA
STATISTICS PORTUGAL

29 de dezembro de 2016

Matrizes Simétricas Input-Output

2013

Um euro adicional de consumo privado traduzia-se em acréscimos de 74 cêntimos do PIB e de 26 cêntimos de importações em 2013

Nesse destaque são apresentadas Matrizes Simétricas de Input-Output para a economia portuguesa referentes a 2013 e inteiramente consistentes com a nova base das Contas Nacionais e com o Sistema Europeu de Contas SEC 2010.

A título ilustrativo da informação disponibilizada, refira-se que, sob certas condições, um incremento uniforme da Despesa de Consumo Final das Famílias, totalizando 100 unidades monetárias, conduz a um aumento do PIB em 74 unidades e a um crescimento das importações em 26 unidades.

Com esta publicação, o Instituto Nacional de Estatística (INE) divulga as Matrizes Simétricas Input-Output para o ano de 2013, consistentes com a base 2011 das Contas Nacionais.

Com a publicação destas matrizes, o INE disponibiliza mais uma peça de informação do Sistema de Contas Nacionais, que faz parte integrante do programa de transmissão do Sistema Europeu de Contas (SEC 2010), constituindo uma importante ferramenta de análise e simulação económica. O presente projeto foi desenvolvido integralmente pelo INE, ao contrário das edições anteriores (1999, 2005 e 2008) que foram concretizadas pelo extinto Departamento de Prospetiva e Planeamento em colaboração com o INE.

O processo de construção e a forma de apresentação da informação de Matrizes Simétricas Input-Output, obedecem ao quadro concetual e metodológico definido pelo Eurostat no *"Manual of Supply Use and Input-Output Tables"*. As principais opções e adaptação prática ao caso português estão referidas na "Nota Metodológica" no final deste destaque.

1. Informação disponibilizada

A informação produzida é divulgada num ficheiro anexo ao presente destaque, encontrando-se também disponível na área de Contas Nacionais do Portal do INE.

Além dos quadros *standard* – matriz de produção nacional, matriz de importações e matriz de fluxos totais, a preços base – são ainda disponibilizadas a matriz de fluxos totais a preços de aquisição, a matriz de coeficientes técnicos e a matriz inversa Leontief, também conhecida por matriz de multiplicadores de produção. Simplificadamente, e recorrendo ao ficheiro Excel anexo ao destaque:

- A matriz de produção nacional (folha PN), a preços de base, apresenta os recursos produzidos no território (Produção) e as respetivas utilizações: intermédias (as que entram no próprio processo produtivo como *inputs*) e finais. Por exemplo, nesta matriz, a célula C:19, da folha PN, significa que o ramo 01 (Produção de produtos da agricultura, da produção animal, da caça e dos serviços relacionados) consumiu 100,6 milhões de euros do produto 20 (produtos químicos e fibras sintéticas ou artificiais) produzidos internamente em 2013;

- A matriz de importações (folha M) CIF (*Cost, Insurence and Freight*), apresenta a utilização (intermédia ou final) no território dos bens e serviços importados. Por exemplo, a célula C:19 indica, neste caso, que o ramo 01 consumiu 156,6 milhões de euros do produto 20 de origem importada em 2013;
- A matriz dos fluxos totais (folha FTpb), a preços de base, apresenta os recursos e utilizações de todos os bens e serviços disponíveis no território, produzidos internamente ou importados, e as respetivas utilizações, seja como *input* (consumo intermédio) no próprio processo produtivo, seja como utilização final (despesa de consumo, investimento ou exportações). Na prática corresponde à soma das duas matrizes mencionadas anteriormente;
- A matriz dos fluxos totais (folha FTpa), a preços de aquisição, é equivalente à matriz anterior, mas em que os fluxos estão valorizados a preços de aquisição (preços de base acrescidos de custos de transporte, margens comerciais e impostos líquidos de subsídios aos produtos);
- A matriz de coeficientes técnicos de produção (folha MCT) indica, em cada célula genérica a_{ij}, a proporção de consumo do produto *i pelo ramo j*, no total da produção do ramo j. Recorrendo de novo à célula C:19, o valor apresentado (0,017) significa que o ramo 01, consome 0,017 unidades monetárias com produto 20 (de origem nacional) por cada unidade monetária que produz;
- A matriz de multiplicadores de produção[1] (folha MMultProd), em que cada célula a_{ij} traduz a variação de produção do ramo *i* resultante da variação de uma unidade de procura final dirigida ao ramo *j*. O somatório de todos os elementos da coluna (ramo) *j* constitui o impacto na economia da variação de uma unidade de procura final sobre o ramo *j*. Por exemplo, a célula C:65 significa que o aumento de uma unidade da procura final do ramo/produto 01, conduz ao aumento de produção da economia em 1,85 unidades;
- A matriz de multiplicadores totais de inputs primários (folha MMultInputPrim), cujo conteúdo é semelhante ao da matriz anterior, mede os impactos nos inputs primários (habitualmente importações, remunerações, impostos líquidos de subsídios à produção, excedente e valor acrescentado) resultantes da variação da produção.

2. Aspetos concetuais

No sistema de representação simplificado da economia, subjacente aos resultados apresentados, adotou-se a abordagem de *Leontief*. A atividade económica foi dividida em 64 ramos. Cada ramo produz um único produto. Em geral, as linhas indicam vendas e as colunas indicam compras. As valorizações monetárias das transações refletem a estrutura de preços de 2013.

[1] Trata-se da designada matriz inversa de *Leontief*.

Em termos genéricos e de forma esquemática, as transações na economia são apresentadas num quadro de *input-output* de acordo com a figura seguinte[2]:

Figura 1 – Quadro de input-output

Outputs / *Inputs*			Ramos de atividade						Total da procura intermédia	PROCURA FINAL				Total da procura final	Grande total em linha
			1	2	...	*j*	...	64		Despesa de consumo final das famílias	Despesa de consumo final das APs e ISFLSF	Investimento	Exportação		
Ramos de atividade		1	1º QUADRANTE (trocas intersectoriais de produtos para utilização intermédia)							2º QUADRANTE (Produtos para utilização final)					
		2													
		...													
		i													
		...													
		64													
		Total de consumo intermédio													
Inputs primários		Impostos sobre a produção e importação líquidos de subsídios	3º QUADRANTE (Utilização de inputs primários)							4º QUADRANTE (Inpostos sobre as utilizações, importações diretas)					
	VAB	Remunerações dos empregados													
	VAB	Consumo de capital fixo													
	VAB	Excedente													
		Importações	Importações para a produção							Importações para procura final					
		Total de inputs primários													
Grande total em coluna															

Neste diagrama, representa-se de uma forma especial o equilíbrio entre os *inputs* (recursos) e *outputs* (utilizações) subjacente à contabilidade nacional, evidenciando-se nomeadamente: as transações de *inputs* intermédios entre os vários ramos, no 1º quadrante; os produtos utilizados para satisfazer as grandes componentes da Procura Final (2º quadrante); os *inputs* primários (VAB e importações para produção), no 3º quadrante; e no 4º quadrante, salientam-se as importações diretas para a procura final.

A partir desta forma de representação é possível derivar o chamado modelo de *Leontief* que permite, simular os efeitos de choques na procura final sobre a economia nacional. Por exemplo, avaliar em que medida a variação de uma unidade monetária numa dada componente da procura final (o choque) se manifesta na variação dos *inputs* intermédios e primários (o efeito), tendo em conta as inter-relações internas dos vários ramos da economia. A relação entre o efeito e o choque está expressa nas duas matrizes de multiplicadores apresentadas[3].

No entanto, o modelo, tratando-se de uma representação simplificada da economia, subordina-se a um conjunto importante de hipóteses que devem induzir alguma prudência na interpretação dos resultados, a saber: coeficientes técnicos constantes; inexistência de economias de escala; ausência de variação de preços relativos e de efeitos de substituição; capacidade produtiva ilimitada; produtos homogéneos. Adicionalmente, é importante notar que as restrições financeiras não são objeto de tratamento explícito no modelo.

[2] Ver Vitor Bento, "Modelo de input-output", AEISE, Novembro 1982.

[3] A partir da informação disponibilizada podem ainda ser derivadas matrizes de multiplicadores correspondentes ao efeito sobre a procura final da variação dos inputs primários (choques de oferta).

3. Alguns resultados

Tendo em atenção os condicionalismos decorrentes das hipóteses atrás referidas, apresentam-se alguns resultados[4] da utilização do modelo ("análise *input-output*"), a título meramente ilustrativo, centrados na avaliação da relevância das importações na economia portuguesa.

A informação disponibilizada permite distinguir importações diretas para a Procura Final (cerca de 1/3 do total das importações) das importações utilizadas no processo produtivo. Entre os agregados da Procura Final, é no Investimento que as importações diretas assumem maior expressão relativa. Em termos absolutos, as importações diretas para Despesa em Consumo Final das Famílias são as que apresentam o maior valor. As importações diretas suscitadas pelas Exportações têm uma menor dimensão relativa e absoluta e são muito reduzidas na Despesa Final das Administrações Públicas.

Quadro 1 – Destinos das Importações

			Total	Importada	Import./Total (%)
Utilizações	Procura intermédia		152 844	43 331	28,3
	Procura Final	Despesa de consumo final das famílias	99 766	12 354	12,4
		Despesa de consumo final das administrações públicas	31 837	601	1,9
		Despesa de consumo final das ISFLSF	3 426	3	0,1
		Investimento	23 847	4 778	20,0
		Exportações	59 077	2 469	4,2
		Total	217 954	20 204	9,3
	Total		370 798	63 535	17,1

[1] - O total é superior à soma das parcelas, pois nem todos os agregados da procura final estão explicitados.

No entanto, a informação sobre as importações diretas associadas aos agregados da Procura Final não é suficiente para avaliar os respetivos conteúdos importados, visto que cerca de 2/3 das importações se destinam à produção de bens e serviços que posteriormente são absorvidos pela Procura Final. A análise *input-output* permite ter uma noção do conteúdo importado total (direto+indireto) associado a cada agregado.

Assim, tudo o resto constante, simulou-se o efeito de um incremento em 100 unidades monetárias da despesa correspondente a cada agregado da procura final, distribuído proporcionalmente por todos os produtos (bens e serviços). Os resultados da simulação estão expressos no quadro 2.

Quadro 2 – Impacto de um incremento de 100 unidades monetárias nas principais componentes da procura final

Agregados económicos \ Procura Final	Despesa de consumo final famílias	Despesa de consumo final das administrações públicas	Formação bruta de capital fixa	Exportações
PIB	74	92	67	55
Importações	26	8	33	45
Diretas	13	1	20	4
Indiretas	13	8	13	41
Produção	134	137	138	157
Consumo Intermédio	60	45	71	102
VAB	74	92	67	55
Remunerações	29	66	33	28
Impostos líquidos de subsídios	3	3	3	2
Excedente bruto exploração	43	24	31	25

Entre os resultados obtidos, salientam-se os seguintes:

- Na despesa de consumo final das famílias (Consumo Privado), por cada 100 unidades adicionais consumidas, o PIB aumenta 74 unidades e as importações 26 unidades, das

[4] A informação é apresentada a preços de base.

quais, 13 unidades de bens e serviços para consumo final direto das famílias e 13 unidades destinadas a integrarem o próprio processo produtivo interno;

- Na Despesa do Consumo Final das Administrações Públicas, é pouco expressivo o conteúdo importado, refletindo a natureza indireta da medição do consumo de bens e serviços públicos, baseada fundamentalmente nos custos incorridos pelas Administrações Públicas (onde avultam os encargos com remunerações) para providenciar estes bens e serviços;
- Na FBCF, a variação de 100 unidades conduz a um aumento de 67 unidades no PIB e de 33 unidades nas importações (20 em importações diretas e 13 indiretas);
- Finalmente, a variação de 100 unidades das exportações conduz a um aumento do PIB em 55 unidades e ao maior impacto nas importações: 45 unidades, das quais 41 indiretas.

Estes efeitos seriam naturalmente diferentes se, em lugar do crescimento uniforme das componentes de cada agregado da procura final, se assumissem variações diversas. Por exemplo, se o aumento de 100 unidades monetárias nas exportações ocorresse exclusivamente nos serviços de alojamento e restauração, o PIB e as importações aumentariam, respetivamente, em 86 e 14 unidades. Se o mesmo aumento se verificasse nas exportações de produtos refinados do petróleo, o acréscimo no PIB seria apenas de 6 unidades e nas importações o acréscimo seria de 94 unidades.

Nota Metodológica:

SIMETRIZAÇÃO DOS QUADROS DE SAÍDAS E ENTRADAS

O conjunto de quadros de saídas-entradas é composto por uma sucessão de quadros-matrizes que permitem a passagem dos fluxos a preços de aquisição para os fluxos a preços base, e igualmente da ótica dos fluxos totais (produção e importação) para uma outra restrita à produção nacional. Assim, há um percurso que se inicia na matriz de fluxos totais a preços de aquisição, à qual se subtraem as matrizes das Margens Comerciais e de Transporte, dos Impostos sobre Produtos (IVA e Outros Impostos) e se adiciona a Matriz dos Subsídios sobre/aos Produtos, obtendo-se a Matriz de Fluxos Totais a preços base. A esta matriz é subtraída a Matriz das Importações (valores CIF), obtendo-se a Matriz de Produção Nacional a preços base.

Qualquer uma destas matrizes é quadrada (número de linhas igual ao número de colunas, após as apropriadas agregações) e resulta da combinação entre produtos (leitura em linha) e ramos de atividade (não homogéneos) e variáveis da procura final (leitura em coluna). O termo "ramos não homogéneos" significa que os ramos de atividades incorporam não apenas a produção principal (principal bem ou serviço produzido) como também a produção secundária. Adicionalmente, às Matrizes de Fluxos Totais, a preços de aquisição e a preços base, e à Matriz de Produção Nacional ainda se adiciona suplementarmente um conjunto de informação por ramos de atividade respeitante à distribuição do rendimento primário (repartição do VAB por remunerações excedente bruto de exploração/rendimento misto, excedente líquido, consumo de capital fixo, e impostos e subsídios à produção).

A "simetrização" consiste em transformar as matrizes (produtos x ramos não homogéneos) em matrizes (produtos x ramos homogéneos), isto é, em estabelecer a ligação entre os produtos e os ramos reformulados para se referirem apenas à produção do produto principal e às relações técnicas entre os fatores e essa produção. Esta formulação permite o desenvolvimento subsequente de matrizes de multiplicadores com o objetivo de avaliar os impactos das variações da procura final de produtos sobre a produção e sobre os fatores produtivos ("inputs primários") afetos à produção dos bens e serviços (produtos). Igualmente poderão ser desenvolvidos multiplicadores para medir impactos da alteração nos "inputs primários" sobre a procura intermédia e final dos produtos.

Para se efetuar essa "simetrização", adotou-se o enfoque denominado no manual do Eurostat (Eurostat, 2008) de Método A. Este método é baseado na "tecnologia do produto", que parte do princípio de que cada produto tem a sua especificidade produtiva, independentemente dos ramos em que for produzido. Em consequência, nos ramos em que há produção secundária os recursos que lhe estão afetos deverão ser transferidos de acordo com uma estrutura de inputs específica. Simplificadamente, essa estrutura específica deverá ser próxima da que se verifica no ramo em que esse produto é dominante (o ramo recetor)[5]. Inversamente, o ramo recetor transfere recursos caso tenha produção secundária de outros produtos.

Contudo, este método pode originar resultados pontuais sem sentido à luz da teoria económica, nomeadamente, o método pode originar valores negativos na matriz de consumos intermédios simetrizada. Isto acontece quando a estrutura de inputs do ramo em que o produto é dominante exigir uma transferência de inputs, do ramo em que a produção de um dado produto é secundária, incompatível (isto é, em excesso) com os valores registados originalmente na matriz de consumos intermédios não simetrizada. Refira-se que tais situações são indiciadoras ou de imprecisões na constituição do quadro de base ou de condições produtivas específicas que exigem um tratamento diferenciado.

Face a estes constrangimentos optou-se por desenvolver o método A, na variante Almon. Nesta modalidade, a transferência de recursos é feita linha a linha, e de forma recursiva, ao contrário do método A, que é intrinsecamente simultâneo. Estas condições permitem impor restrições ao método. Nomeadamente, a transferência de recursos afetos à produção secundária é operada numa dada célula até ao ponto em que a mais recente iteração de transferência levaria a que o consumo intermédio nessa mesma célula do "ramo emissor" tomasse um valor negativo. Nesse caso cessa a saída de inputs, se bem que a entrada possa continuar a decorrer, também ela condicionada pelas restrições impostas aos outros ramos (veja-se Anexo).

[5] No anexo sobre a variante de Almon esta abordagem é mais detalhada.

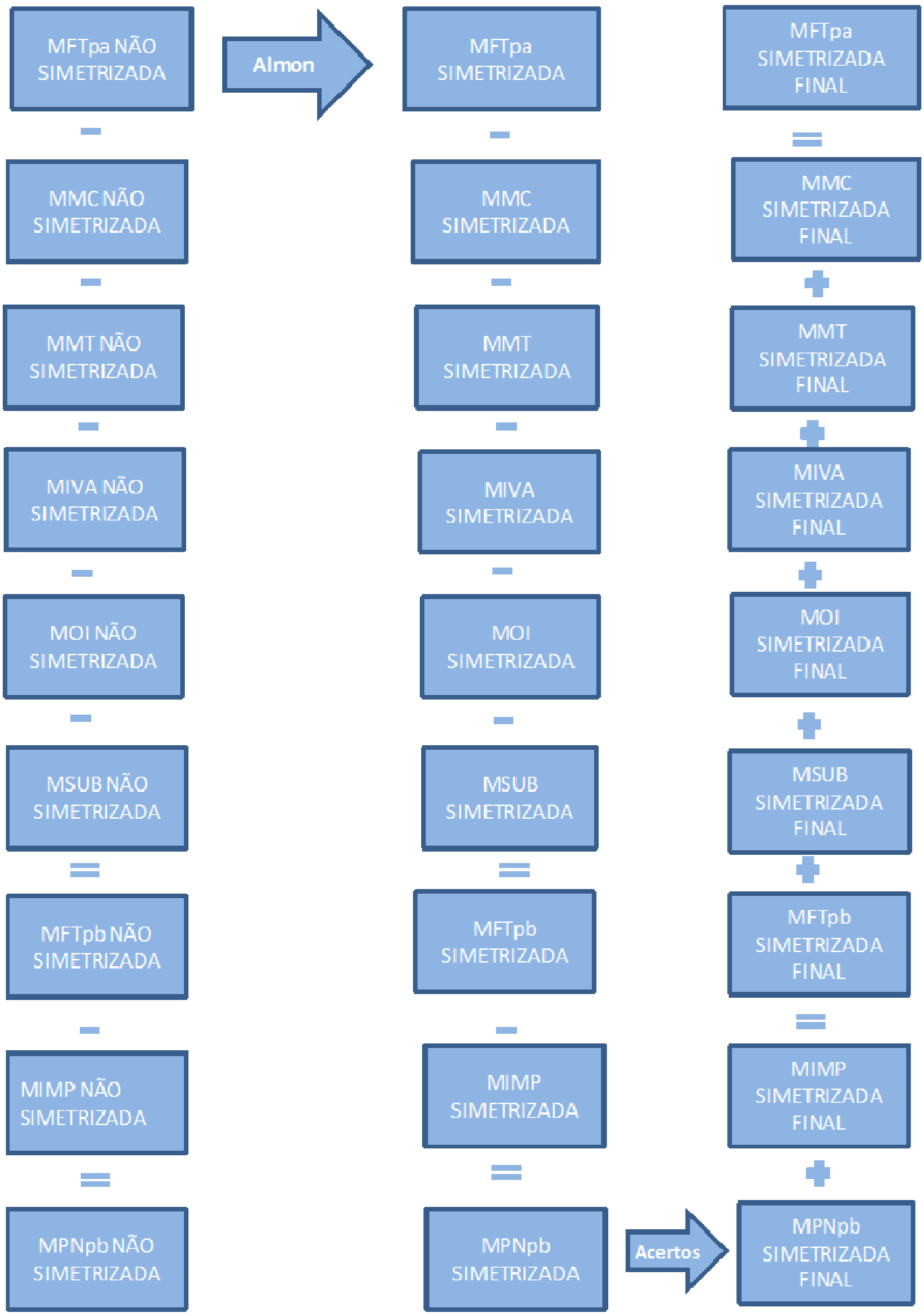
O modelo de Almon foi aplicado de forma "descendente", ou seja, aplicou-se sucessivamente às matrizes utilizadas na valorização da Matriz de Fluxos Totais a preços de aquisição para preços base, e à Matriz de Importação para obter a Matriz de Produção Nacional a preços base. Isto é, foram simetrizadas autonomamente as matrizes de Margens Comerciais e de Transporte, do IVA, de Outros Impostos e dos Subsídios sobre os produtos e de Importações (veja-se a Figura 1, que retrata as várias fases do processo de simetrização). No caso das matrizes de Margens Comerciais e de Transporte, a simetrização foi realizada recorrendo a duas submatrizes, uma com valores positivos, a outra com os valores absolutos dos negativos (anulando os restantes elementos em cada partição). O método RAS foi em seguida utlizado para compatibilizar as somas em linha, respeitando assim o total das margens comerciais e de transporte em cada produto.

Deste modo, por subtração obtiveram-se a Matriz de Fluxos Totais a preços base e a Matriz de Produção Nacional simetrizadas. Estas foram objeto de acertos adicionais para eliminar alguns casos de valores negativos decorrentes das subtrações sucessivas. Após estes ajustamentos, o processo desenrolou-se de forma "ascendente" até à Matriz de Fluxos Totais a preços de aquisição, com o objetivo de eliminar os impactos dos acertos nas matrizes de Produção Nacional e de Fluxos Totais a preços base.

O módulo dos inputs primários (VAB e sua distribuição em remuneração dos fatores produtivos, bem como o emprego remunerado) foi também simetrizado através da variante de Almon, o que obrigou a recorrer adicionalmente ao RAS, cumprindo a tripla restrição de compatibilização com os valores já divulgados, equilíbrio entre empregos e recursos, e a consistência entre o VAB e a suas componentes, designadamente a remuneração dos fatores e os outros impostos líquidos de subsídios ligados à produção. O modelo A e a sua variante de Almon foram desenvolvidos em GNU Octave[6]. Os outros modelos referenciados no Manual do Eurostat, B, C e D foram também desenvolvidos na fase de arranque do projeto, antes da escolha do modelo a aplicar com recurso ao mesmo software, em alternativa à utilização de folha de cálculo. Destes modelos, apenas a variante de Almon dificilmente poderá ser desenvolvida em folha de cálculo.

[6] Programas com execução compatível com MatLab TM

Figura 1. Fases do processo de obtenção das matrizes simetrizadas



ANEXO: Descrição da variante Almon

No momento de arranque são conhecidas as matrizes de fluxos totais a preços de aquisição, matriz de consumos intermédios, e a matriz de produção, que especifica os produtos fabricados em cada ramo de produção não homogéneo. Ambas as matrizes são quadradas, a primeira na forma de (produto x ramo não homogéneo), a segunda na forma (ramo não homogéneo x produto). Neste formato, a matriz de produção denomina-se de "Make matrix" e pode ser reformulada para que cada coluna represente a importância relativa de cada ramo na produção de um dado produto (assim, a soma em coluna é igual à unidade). A transposta desta matriz modificada é fundamental na aplicação do método A e na variante Almon.

Admitindo a hipótese da tecnologia de produto, e sabendo que a matriz não simetrizada é composta pelos consumo intermédios de ramos não homogéneos, conclui-se que cada coluna (os consumos intermédios de um dado ramo) é uma média ponderada de diferentes tecnologias de produtos, tantas quanto o número de produtos fabricados no ramo não homogéneo (a que corresponde ao produto principal mais as que se devem às produções secundárias). Os ponderadores representam a importância relativa do ramo na produção dos diferentes produtos (por exemplo, se o ramo r, produz o produto k, l, s, o primeiro sendo dominante, as proporções poderão ser as seguintes: 0,553; 0,341; 0,287. Isto é, o ramo fabrica 55,3% do total do produto k; fabrica 34,1% do total da produção de l; e fabrica 28,7% da produção de s).

Considere-se a seguinte notação:

U = matriz (*p*, *r*), quadrada, de consumos intermédios.
M'= representa a transposta da matriz de produção modificada, na forma (*p*, *r*). Cada linha representa a distribuição da produção de cada produto pelos diferentes ramos; a soma da linha é igual à unidade. Tem-se:

$$U = R \cdot M'$$

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{n1} & u_{n2} & \dots & u_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots & r_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m_{11} & m_{21} & \dots & m_{n1} \\ m_{12} & m_{22} & \dots & m_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_{1n} & m_{2n} & \dots & m_{nn} \end{bmatrix},$$

em que a matriz *R* ainda não é conhecida, mas tem um significado bem determinado, pois reúne as "receitas tecnológicas", isto é, o conjunto de combinações tecnológicas de inputs necessários à produção especificada de cada um dos *n* produtos.
Se cada coluna de *U* é um compósito de receitas, então, por exemplo, para o ramo 1 (não homogéneo) verifica-se a seguinte igualdade:

$$\begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{21} \\ \dots \\ u_{n1} \end{bmatrix} = m_{11} \cdot \begin{bmatrix} r_{11} \\ r_{21} \\ \dots \\ r_{n1} \end{bmatrix} + m_{12} \cdot \begin{bmatrix} r_{12} \\ r_{22} \\ \dots \\ r_{n2} \end{bmatrix} + \dots + m_{1n} \cdot \begin{bmatrix} r_{1n} \\ r_{2n} \\ \dots \\ r_{nn} \end{bmatrix},$$

em que as colunas são as tecnologias dos possíveis produtos desenvolvidos no ramo 1, um dos quais de forma dominante (o produto 1). Os m_{1i} representam as importâncias do ramo 1 na produção de cada tipo de produto (relativamente ao total de cada um deles). Cada coluna representa o total de inputs intermédios requeridos para a produção de um dado produto num valor bem determinado (relembre-se que é conhecido o valor da produção dos produtos).

A matriz R pretendida pode assim ser facilmente determinada, obtendo-se[7]:

$$R = U \cdot (M')^{-1}$$

A consideração das Séries de Neumann para o cálculo da inversa de uma matriz é útil para compreender o modo como a inversa de M' opera sobre a matriz U, de forma a obter a matriz R. Segundo esta formulação, esta inversa é dada pela seguinte equação:

$(M')^{-1} = \sum_{i}^{n} (I - M')^i$, desde que $\lim_{n\to\infty} (I - M')^n = [0]$. Heuristicamente, deverá verificar-se esta condição, tomando em conta que a matriz das diferenças é composta por termos inferiores à unidade. Explicitando as duas primeiras parcelas desta série de matrizes:

$(M')^{-1} = (I - M')^0 + (I - M')^1 = I + (I - M')$, ou seja:

$$I + (I - M') = \begin{bmatrix} (2-m_{11}) & -m_{21} & \dots & -m_{n1} \\ -m_{12} & (2-m_{22}) & \dots & -m_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -m_{1n} & -m_{2n} & \dots & (2-m_{nn}) \end{bmatrix}.$$

Veja-se o caso da primeira aproximação da primeira coluna da matriz R, que representa a tecnologia do produto 1, e que constitui a primeira coluna da matriz simetrizada dos consumos intermédios:

$$\begin{bmatrix} r_{11} \\ r_{21} \\ \dots \\ r_{n1} \end{bmatrix}^{(1^a)} = (2-m_{11}) \cdot \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{21} \\ \dots \\ u_{11} \end{bmatrix} - m_{12} \cdot \begin{bmatrix} u_{12} \\ u_{22} \\ \dots \\ u_{n2} \end{bmatrix} - \dots - m_{1n} \cdot \begin{bmatrix} u_{1n} \\ u_{2n} \\ \dots \\ u_{nn} \end{bmatrix}$$

A primeira coluna da matriz U, respeitante ao ramo 1 não homogéneo, fica com os seus elementos ampliados (o fator $(2-m_{11})$ é superior à unidade), enquanto são subtraídas frações dos elementos das restantes colunas, respeitantes à produção secundária do ramo 1 não homogéneo. Note-se que ponderadores que determinam as parcelas a subtrair representam a importância que o ramo 1 não homogéneo tem na produção de outros produtos, secundários neste ramo). Em conclusão, esta primeira iteração reproduz a intuição de extrair o valor "a mais" dos consumos intermédios, sendo tal contrabalançado pelo reforço de consumos intermédios em concordância com a estrutura de inputs do ramo. Nas iterações seguintes os ponderadores são não lineares (resultam de produtos dos ponderadores simples, isto é, dos elementos da matriz M') gerando efeitos mais complexos.

Como foi assinalado, o problema com o método A é que este pode produzir elementos da matriz R com valores negativos. Almon (2000) desenvolveu uma técnica que permite tornear este tipo de resultados. A técnica que utilizou será aqui apresentada em dois passos, seguindo de perto exposição de Koller (2006).

[7] No manual do Eurostat, as matrizes são S=T.U, sendo claro que S=R que $(M')^{-1}$=T

1º Passo: desenvolvimento em linha

O processo é iterativo e é aplicado linha a linha, o que significa que o consumo intermédio de um dado produto é reafectado a cada ramo de acordo com as tecnologias específicas de cada produto. Nesse aspeto diferencia-se da abordagem do método A, que por ser intrinsecamente de tratamento simultâneo, tanto pode ser encarada linha a linha, como coluna a coluna (foi este último modo que foi utilizado na exposição feita no parágrafo de anterior, com o exemplo do ramo 1). Esta diferenciação na abordagem não impede a produção de resultados idênticos aos do método A, quando as condições das matrizes U e $\left(M'\right)^{-1}$ geram resultados não negativos em R, na aplicação desse método. Contudo, as restrições adicionalmente impostas por Almon permitem alcançar resultados não negativos com matrizes U e $\left(M'\right)^{-1}$ que produziriam resultados negativos com o método A, como se apresentará no 2º passo.

Seguindo Koller (2006), o processo pode ser representado[8] pelas equações seguintes:

$$r_i^{(0)} = u_i$$
$$r_i^{(l+1)} = r_i^{(l)} \cdot (I - M') + u_i$$

A primeira equação representa a condição inicial do processo iterativo, em que o vetor-linha é igual ao vetor inicial da matriz de consumos intermédios. A segunda equação representa a *(l+1)-ésima* iteração.

Por exemplo, para o caso dos consumos intermédios do produto 2 pelos "ramos homogéneos"[9], a expansão da equação matricial toma esta forma:

$$\begin{bmatrix} r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2n} \end{bmatrix}^{(l+1)} = \begin{bmatrix} r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2n} \end{bmatrix}^{(l)} \cdot \begin{bmatrix} (1-m_{11}) & -m_{21} & \dots & -m_{n1} \\ -m_{12} & (1-m_{22}) & \dots & -m_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -m_{1n} & -m_{2n} & \dots & (1-m_{nn}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{21} & u_{22} & \dots & u_{2n} \end{bmatrix}$$

A matriz $(I - M')$ dos coeficientes especifica o modo como se devem efetuar as adições ou subtrações em cada "ramo homogéneo" de consumos intermédios do produto 2. Pós-multiplicada pela estimativa do vetor-linha r_2 obtida na *(l)-ésima* iteração permite obter os sucessivos fatores de correção ao vetor-linha fixo u_2. O processo iterativo termina quando se atinge o critério de convergência: $\lim\left(r_2^{(l+1)} - r_2^{(l)}\right) \to 0.$

O mesmo processo pode ser reformulado para:

$$r_i^{(l+1)} = u_i - r_i^{(l)}.\widetilde{M}' + (e'.\widetilde{M}) \otimes r_i^{(l)},$$

em que $\widetilde{M}'$ representa a transposta da matriz de produção (está portanto na forma de (produtos x ramos)), mas extraída da sua diagonal principal, passando esta a ser composta por zeros. A intuição para esta reformulação será apresentada mais à frente. O vetor-linha de agregação (vetor unitário) é dado por e'. O símbolo $\otimes$ representa o produto direto de vetores com a mesma dimensão[10].

[8] Uma outra representação formal da variante Almon (Eurostat, 2008, pág. 350) foi usada no desenvolvimento dos algoritmos em GNU Octave.

[9] A expressão está entre aspas porque só no final do processo se poderá considerar a existência de ramos homogéneos.

[10] Não confundir com o produto Kronecker, para o qual se aplica habitualmente o mesmo símbolo $\otimes$.

Voltando a ilustrar o caso dos consumos intermédios do produto 2:

$$\begin{bmatrix} r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2n} \end{bmatrix}^{(l+1)} = \begin{bmatrix} u_{21} & u_{22} & \dots & u_{2n} \end{bmatrix} -$$

$$-\begin{bmatrix} r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2n} \end{bmatrix}^{(l)} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -m_{21} & \dots & -m_{n1} \\ -m_{12} & 0 & \dots & -m_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -m_{1n} & -m_{2n} & \dots & 0 \end{bmatrix} +$$

$$+\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -m_{21} & \dots & -m_{n1} \\ -m_{12} & 0 & \dots & -m_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -m_{1n} & -m_{2n} & \dots & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2n} \end{bmatrix}$$

Como apoio à compreensão do que está em causa considere-se o caso de matrizes de dimensão de (3 x 3). Pretende-se obter o vetor-linha r_1 (subentendendo que o lado esquerdo contém a *(l+1)-ésima* iteração e o lado direito a (*l)-ésima* iteração):

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} (r_{12} \cdot m_{12} + r_{13} \cdot m_{13}) & (r_{11} \cdot m_{21} + r_{13} \cdot m_{23}) & (r_{11} \cdot m_{31} + r_{12} \cdot m_{32}) \end{bmatrix} +$$

$$+\begin{bmatrix} (r_{11} \cdot (m_{21} + m_{31})) & (r_{12} \cdot (m_{12} + m_{32})) & (r_{13} \cdot (m_{13} + m_{23})) \end{bmatrix}$$

O vetor-linha r_1 representa o consumo intermédio do produto 1 pelos *n* ramos homogéneos. O vetor-linha u_1 representa os consumos intermédios iniciais. Em seguida, há uma parte a subtrair, correspondente à produção secundária de cada um dos ramos; há uma parte a adicionar ao ramo, correspondente ao que é produção secundária nos outros ramos e produção principal no ramo que está a ser objeto de correção.

Considere-se o caso do elemento r_{13}, que trata do consumo intermédio do produto 1 no "ramo homogéneo" 3:

$$r_{13}{}^{(l+1)} = u_{13} - \left(r_{11}{}^{(l)} \cdot m_{31} + r_{12}{}^{(l)} \cdot m_{32} \right) + r_{13}{}^{(l)} \cdot (m_{13} + m_{23})$$

Do lado direito, além de u_{13}, a parcela a subtrair é composta pelo valor do produto 1 usado como consumo intermédio na produção secundária dos produtos 1 e 2 no ramo 3, e tal extração é efetuada de acordo com as respetivas tecnologias de produto, $r_{11}{}^{(l)}$ e $r_{12}{}^{(l)}$, estimadas na iteração anterior. Além desta parcela, inclui-se a somar a parte que diz respeito ao consumo intermédio do produto 1 na produção secundária do produto 3, nos ramos 1 e 2; de novo, esta parte é estabelecida combinando a tecnologia de produto (no ramo 3, com $r_{13}{}^{(l)}$) e a importância relativa dessa produção (desta vez nos ramos 1 e 2). Note-se que a parte a adicionar também pode ser dada por $r_{13}^{(l)}(1 - m_{33}) = \sum_{j \neq 3} r_{j3}^{(l)} m_{j3}$. A equação anterior é facilmente generalizável. Por exemplo, caso o ramo 3 produzisse secundariamente os restantes n-1 produtos, e inversamente todos os restantes n-1 ramos produzissem secundariamente o produto 3:

$r_{13}{}^{(l+1)} = u_{13} - \left(r_{11}{}^{(l)} \cdot m_{31} + r_{12}{}^{(l)} \cdot m_{32} + \dots + r_{1n}{}^{(l)} \cdot m_{3n} \right) + r_{13}{}^{(l)} \cdot (m_{13} + m_{23} + \dots + m_{n3})$, com exclusão de $r_{13}{}^{(l)} \cdot m_{33}$.

2º Passo: Aplicação de restrições linha a linha

O desenvolvimento em linha apresentado até aqui serviu de introdução à variante de Almon, pois tendo esta como função inibir a existência de valores negativos nas matrizes simetrizadas, contém necessariamente restrições à subtração de valores nos consumos intermédios. Na verdade, as restrições a impor têm implicações tanto na parte de extração como na parte de adição, como se verá em seguida.

A equação de desenvolvimento em linha passa a incorporar a seguinte restrição:

$$r_i^{(l+1)} = u_i - s_i^{(l)} \otimes r_i^{(l)}.\widetilde{M}' \ + (s_i^{(l)}.\widetilde{M}) \otimes r_i^{(l)},$$

Por facilidade considere-se ainda que $w_i^{(l)} = r_i^{(l)}.\widetilde{M}'$, tem-se para a expressão anterior:

$$r_i^{(l+1)} = u_i - s_i^{(l)} \otimes w_i^{(l)} + (s_i^{(l)}.\widetilde{M}) \otimes r_i^{(l)}$$

A restrição é especificada do seguinte modo:

$s_i^{(l)}$ é um vetor linha, $s_i^{(l)} = \begin{bmatrix} s_{i1}^{(l)} & s_{i2}^{(l)} & \dots & s_{in}^{(l)} \end{bmatrix}$, tal que para cada elemento:

$$s_{ij}^{(l)} = \begin{cases} 1, & se \ \ u_{ij} > w_{ij}^{(l)} \\ u_{ij} \big/ w_{ij}^{(l)}, & se \ \ u_{ij} \le w_{ij}^{(l)} \end{cases}$$

Tome-se de novo o caso do vetor-linha r_1 :

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \end{bmatrix} - \Big[s_{11}.(r_{12}m_{12} + r_{13}m_{13}) \ \ s_{12}.(r_{11}m_{21} + r_{13}m_{23}) \ \ s_{13}.(r_{11}m_{31} + r_{12}m_{32}) \Big] + \\ + \Big[(s_{12}r_{11}m_{21} + s_{13}r_{11}m_{31})(s_{11}r_{12}m_{12} + s_{13}r_{12}m_{32})(s_{11}r_{13}m_{13} + s_{12}r_{13}m_{23}) \Big]\end{aligned}$$

Tomando também o caso do elemento r_{13} (consumo intermédio do produto 1 no "ramo homogéneo" 3):

$$r_{13}^{(l+1)} = u_{13} - s_{13}^{(l)}.\left(r_{11}^{(l)} \cdot m_{31} + r_{12}^{(l)} \cdot m_{32}\right) + \left(s_{11}^{(l)} r_{13}^{(l)} m_{13} + s_{12}^{(l)} r_{13}^{(l)} m_{23}\right)$$

Sempre que a parte a subtrair se torna superior ao consumo intermédio inicial u_{1j} a restrição é ativada, sendo subtraído um valor máximo igual a u_{1j}. Por outro lado, a componente aditiva continua a operar, mas sujeita às condições restritivas existentes nos ramos de partida. Neste aspeto, a análise cruzada das restrições é elucidativa: a parcela a subtrair para alcançar $r_{13}^{(l+1)}$ deve ser adicionada aos "ramos homogéneos" 1 (na parte $r_{11}^{(l)} \cdot m_{31}$) e 2 (na parte $r_{12}^{(l)} \cdot m_{32}$). E em ambos os casos, as entradas e as saídas estão afetadas do mesmo fator restritivo, $s_{13}^{(l)}$. Inversamente, as adições a r_{13} são as saídas de outros "ramos homogéneos" e também estão afetadas dos correspondentes fatores restritivos ($s_{11}^{(l)}$ e $s_{12}^{(l)}$, para os ramos 1 e 2, respetivamente). A existência de um equilíbrio entre as entradas e saídas já se verificava no método A; esse equilíbrio na variante Almon está embebido nas restrições impostas.

Referências bibliográficas

- Almon, C. (2000). Product-to-product tables via product-technology with non negative flows, Economic Systems Research, 12(1).
- Eurostat (2008), Manual of Supply Use and Input-Output Tables, (Cap.11 Transformation of supply and use tables to symmetric input-output tables), Methodologies and Working papers, Luxembourg, March 2008.
- Koller, Wolfgan (2006), Commodity-by-Commodity Input-Output Matrices: Extensions and Experiences from an Application to Austria, Industriewissenschaftliches Institut.
- Vollebregt, Michel and van Dalen, Jan (2002), Deriving Homogeneous Input/Output Tables From Supply and Use Tables, CBS, Statistics Netherlands.