FUNÇÕES DE CONJUNTO CONVEXAS: UMA APLICAÇÃO AO MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS

CONVEX FUNCTIONS OF SET: AN APPLICATION TO THE LEAST SQUARES METHOD

Autor: João Ferreira do Amaral

Prof. Catedrático do Instituto Superior de Economia e Gestão da Universidade Técnica de Lisboa

e

Membro do Conselho Editorial da Revista de Estatística

***RESUMO*:**

- Neste artigo é desenvolvido o conceito de classe de conjuntos convexas e de funções de conjunto convexas.
  A aplicação à função de conjunto supremo, quando a função de ponto respectiva é convexa, permite obter alguns resultados interessantes nomeadamente para a estimação de parâmetros pelo método dos mínimos quadrados quando há erros nas variáveis.

***PALAVRAS-CHAVE*:**

- *classe; conjunto; convexo; função; estimação.*

***ABSTRACT*:**

- In this paper we develop the concept of convex classes of sets and of convex functions of set.
  These concepts are useful for studying some set functions as for instance the supremum function when the respective point function is convex.
  An example is the least squares approach when there are errors in the variables.

***KEY-WORDS*:**

- *class; set; convex; function; estimation.*

1. INTRODUÇÃO

Em vários trabalhos anteriores (Albuquerque et al 1969, Amaral 1982, Amaral 1986) estudámos os conceitos de classes e funções de conjunto convexas. Consideramos que se trata de conceitos que podem ser úteis em diversas aplicações na Matemática e na Econometria.

Neste trabalho apresentamos novos resultados e estudamos uma aplicação a problemas de Econometria com a utilização do método dos mínimos quadrados.

Começamos por relembrar o conceito de classe convexa e, em termos muito gerais, determinamos o domínio onde se torna útil estudar as funções de conjunto convexas.

Na secção 2 abordamos as funções de conjunto convexas em geral, na secção 3 a função supremo e finalmente, na secção 4 descrevemos uma aplicação ao método dos mínimos quadrados quando se suspeita da existência de erros, mas não muito significativos, nas observações.

2. CLASSES CONVEXAS E CADEIAS DE CONJUNTOS

Nesta secção vamos estudar as propriedades de diversos tipos de classes de conjuntos que são importantes para a abordagem do tema principal deste trabalho que é o das funções de conjunto convexas. Começaremos pelo conceito de classe convexa, por nós introduzido em Albuquerque et al. (1969).

Consideremos um conjunto fundamental de elementos quaisquer. Com o símbolo 1 designaremos o conjunto e com 2^{1} a classe de todos os conjuntos subconjuntos de 1.

DEFINIÇÃO 1: Uma classe $\mathsf{P} \subset 2^1$ é **convexa** se e só se com Po $\subset$ P1 e Po,P1 $\in$ P se tem P $\in$ P para qualquer P $\in$ 2^1 tal que Po $\subset$ P $\subset$ P1. A classe vazia de conjuntos, a classe formada por um só conjunto e as classes que não tenham dois conjuntos um incluído no outro (conjuntos encadeados) são, por definição, convexas degeneradas.

Com esta definição vê-se imediatamente que 2^1 é uma classe convexa, bem como a classe Q, de todos os subconjuntos de qualquer Q $\in$ 2^1 e respectiva classe $2^1 - \mathsf{Q}$. Vê-se ainda que qualquer classe subclasse de uma classe convexa degenerada também o é.

Podemos agora demonstrar alguns teoremas sobre classes convexas.

TEOREMA 1: O produto de duas classes convexas é uma classe convexa.[1]

[1] Em todo este trabalho designaremos por “soma” e “produto” de conjuntos ou classes os resul-tados, respectivamente da operação de união (adição) ou de intersecção (multiplicação) de conjuntos ou classes.

Demonstração:

Com efeito, sejam P e R classes convexas. Consideremos Ro e R1 $\in$ $\mathsf{P} \cap \mathsf{R}$ com Ro $\subset$ R1 e um qualquer R $\in$ 2^1 tal que Ro $\subset$ R $\subset$ R1. Como Ro,R1 $\in$ P tem-se R$\in$ P e da mesma forma, também R $\in$ R, pelo que R $\in$ $\mathsf{P} \cap \mathsf{R}$. Se P ou R degeneradas, $\mathsf{P} \cap \mathsf{R}$ é subclasse de qualquer delas, logo também é degenerada.

Devido a este teorema, podemos dizer que, para qualquer classe $\mathsf{C} \subset 2^1$ existe a menor (no sentido da inclusão de classes) classe convexa que contém C. Essa menor classe convexa é o produto de todas as classes convexas que contêm C (e existe pelo menos uma, pois 2^1 é convexa).

Temos, também os teoremas seguintes.

TEOREMA 2: O produto cartesiano de duas classes convexas não degeneradas é uma classe convexa não degenerada

Demonstração:

Sejam R_0 , $R_1 \in$ $\mathsf{P} \otimes \mathsf{R}$ e R $\in$ $2^1 \otimes 2^1$ com $R_0 \subset R \subset R_1$. Tem-se $R_0 = (R^1{}_0 \quad R^2{}_0)$ e $R_1 = (R^1{}_1 R^2{}_1)$ com $R^1{}_I \in$ P e $R^2{}_I \in$ R. Como $R_0 \subset R \subset R_1$ tem-se $R = (R^1{}_2 R^2{}_2)$, $R^1{}_0 \subset R^1{}_2 \subset R^1{}_1$ e $R^2{}_0 \subset R^2{}_2 \subset R^2{}_1$. Então, $R^1{}_2 \in$ P e $R^2{}_2 \in$ R pelo que R $\in$ $\mathsf{P} \otimes \mathsf{R}$ como se queria provar.

TEOREMA 3: Seja P uma classe convexa não degenerada e E um conjunto de 2^1 tal que E $\cap$ P = $\varnothing$ para qualquer P $\in$ P. Seja P_E a classe de todos os conjuntos P $\cup$ E em que P $\in$ P. Então, P_E é convexa

Demonstração:

Sejam $P^*{}_0$, $P^*{}_1 \in$ P_E e $P^* \in 2^1$ com $P^*{}_0 \subset P^* \subset P^*{}_1$. Por definição de P_E, $P^*{}_0 = P_0 \cup E$ e $P^*{}_1 = P_1 \cup E$. Por consequência, $P_0 \cup E \subset P_1 \cup E$. Então, podemos escrever $E \subset P^*$ e $P^* = (P^*\text{-}E) \cup E$. Por outro lado, como E é disjunto de P_0 e P_1 tem-se $P_0 \subset P^* - E \subset P_1$, pelo que $P^* - E \in$ P, uma vez que P é convexa. Então., por definição de P_E, tem-se $P^* \in$ P_E.

TEOREMA 4: Seja P uma classe convexa não degenerada e E $\in$ 2^1 tal que, para qualquer P $\in$ P, E $\subset$ P. Então, sendo P_E a classe de todos os conjuntos P - E com P $\in$ P, P_E é uma classe convexa.

Demonstração:

Sejam $P^*{}_0$, $P^*{}_1 \in$ P_E e $P^* \in 2^1$ com $P^*{}_0 \subset P^* \subset P^*{}_1$. Tem-se $P^*{}_0 = P_0\text{-}E$ e $P^*{}_1 = P_1\text{-}E$ com P_0, $P_1 \in$ P e $E \subset P_0 \subset P_1$. Então $P_0 - E \subset P^* \subset P_1 - E$ e $P_0 \subset P^* \cup E \subset P_1$, pelo que $P^* \cup E \in$ P. Como se tem $P^* = (P^* \cup E)\text{-}E$ por ser $E \cap P^* = \varnothing$ (uma vez que $P^* \subset P_1 - E$) tem-se também $P^* \in$ P_E.

Exemplos de classes convexas:

Podemos dar alguns exemplos mais de classes convexas, para além dos já referidos. Seja $P \in 2^1$. Como vimos, a classe Q dos subconjuntos de P também é convexa. Mas, pelo teorema 3, também é convexa a classe de todos os conjuntos $X \cup (1 - P)$ para os $X \in \mathsf{Q}$.

Um outro exemplo: sejam $P, Q \in 2^1$ e as respectivas classes P e Q de subconjuntos de P e Q. Então, $\mathsf{P} - \mathsf{Q}$ é convexa (eventualmente degenerada). Com efeito, $2^1 - \mathsf{Q}$ é convexa, como se viu atrás, pelo que, fazendo o produto $\mathsf{P} \cap (2^1 - \mathsf{Q}) = \mathsf{P} - \mathsf{Q}$ se obtém uma classe convexa (teorema 1).

Poderíamos multiplicar facilmente os exemplos. O que fica dito, chega, supomos, para demonstrar que muitas classes de interesse do ponto de vista da análise de funções de conjunto têm a propriedade da convexidade. No entanto, como veremos mais adiante, não é útil, do ponto de vista dessa análise considerar apenas conjuntos pertencentes a classes convexas em geral. Teremos, por isso, de utilizar também mais tipos de classes como intervalos (que ainda são convexas) e, principalmente, cadeias de conjuntos (que em geral não o são). Temos assim:

DEFINIÇÃO 2: Sejam $P_0, P_1 \in 2^1$ com $P_0 \subset P_1$. **Intervalo** de extremos P_0 e P_1 é a classe $\mathsf{I} = [P_0\, P_1]$ de todos os conjuntos $P \in 2^1$ tais que $P_0 \subset P \subset P_1$.

Observação: Como é evidente, qualquer intervalo é uma classe convexa. Note-se, também que a soma de dois intervalos $[P_0\, P_1]$ e $[P_1\, P_2]$ em que o extremo P_1 é o mesmo, não é um intervalo de extremos P_0 e P_2. Com efeito, consideremos um $Q \in 2^1$ tal que $P_0 \subset Q$ e $Q \subset P_2$ e tal que Q não está incluído em P_1 nem P_1 em Q. Então, $Q \in [P_0\, P_2]$ mas $Q \notin [P_0\, P_1]$ e $Q \notin [P_1\, P_2]$. Mas também é evidente que se tem sempre $[P_0\, P_1] \cup [P_1\, P_2] \subset [P_0\, P_2]$ e que $[P_0\, P_2]$é a menor classe convexa que contém $[P_o\, P_1] \cup [P_1\, P_2]$.

DEFINIÇÃO 3: Sejam $P_0, P_1 \in 2^1$ com $P_0 \subset P_1$. **Cadeia** de extremos P_0, P_1 é uma classe $\mathsf{C} = \{P_0\, P_1\}$ tal que, para qualquer par de conjuntos Q_0 , Q_1 de C se tem $P_0 \subset Q_0 \subset P_1$, $P_0 \subset Q_1 \subset P_1$ e Q_0 e Q_1 encadeados. Tal como nos Intervalos podemos distinguir cadeias abertas e fechadas. P_0 e P_1 são os **extremos** da cadeia.

DEFINIÇÃO 3*: Seja $\mathsf{C} = \{P_0\ P_1\}$ uma cadeia. Então, $\mathsf{C}^* = \{Q_0\ Q_1\}$ é uma **subcadeia completa** de C se for uma cadeia contida em C e se para todo o $Q \in \mathsf{C}$ tal que $Q_0 \subset Q \subset Q_1$ se tem $Q \in \mathsf{C}^*$.

Observação: Note-se que, em geral uma cadeia não é uma classe convexa. Verifica-se facilmente que a menor classe convexa que contém uma dada cadeia é o intervalo com os mesmos extremos, uma vez que este intervalo é a soma de todas as cadeias com os mesmos extremos.

Finalmente, podemos verificar que, com $\{P_0\, P_1\}$ e $\{P_1\, P_2\}$, em que P_1 é o mesmo conjunto, $\{P_0\, P_1\} \cup \{P_1\, P_2\}$ é uma cadeia $\{P_0\, P_2\}$, o que contrasta com o caso dos intervalos, como se viu acima e torna mais clara, como se verificará adiante, a utilidade das cadeias de conjuntos na análise de funções de conjunto.

Uma propriedade importante das classes convexas tem a ver com a intersecção por cadeias, à semelhança dos conjuntos convexos em R^n que, como se sabe, são cortados em não mais de dois pontos por qualquer recta do espaço.

Iremos, pois, definir intersecção de uma classe por uma cadeia de conjuntos[2], mas antes definimos a propriedade - ψ de uma classe, que se destina a introduzir uma espécie de continuidade.

DEFINIÇÃO 4: Diz-se que uma classe M qualquer tem a **propriedade - ψ** se e só se, para quaisquer $P, Q \in \mathsf{M}$ com $P \subset Q$ e $P \neq Q$ existe sempre um $R \in \mathsf{M}$, $R \neq P$, $R \neq Q$, tal que $P \subset R \subset Q$.

Com esta definição podemos demonstrar imediatamente o seguinte teorema:

TEOREMA 5. Uma classe convexa P nunca tem a propriedade - ψ.

Demonstração:

Só precisamos demonstrar para classes não degeneradas. Sejam $P \subset Q$, $P \neq Q$ e $x \in Q - P$. Então, $P \cup \{x\} \in \mathsf{P}$ por ser P convexa. Como não existe nenhum conjunto entre P e $P \cup \{x\}$, P não tem a propriedade - ψ.

<u>Observação:</u> Este teorema ilustra a dificuldade de utilizarmos apenas classes convexas numa análise de funções de conjunto. Deixaríamos, com efeito, de poder contar com conceitos de continuidade e de limite que são, naturalmente de grande importância. Daí o termos introduzido o conceito de cadeia de conjuntos porque, essas sim, poderão apresentar a propriedade ψ.

Entretanto, é fácil de ver que a continuidade assegurada pela propriedade ψ pode não ser ainda totalmente satisfatória. Consideremos o seguinte exemplo: um ponto $x \in R^n$ e a cadeia formada pelo conjunto $\{x\}$ e por todos os conjuntos esferas $B^r_x = \{y \in R^n: d(x\ y) < r)\}$, com $0 < r_0 < r < r_1$ para todos os r reais. Como é evidente, esta cadeia tem a propriedade ψ mas não se pode considerar que seja contínua no sentido habitual do termo. Daí o introduzirmos a propriedade ψ* seguinte:

DEFINIÇÃO 5. Diz-se que a cadeia C tem a **propriedade ψ*** descendente (ascendente) se e só se tem a propriedade ψ e, para qualquer quantidade numerável ou não de conjuntos de C se tem o produto (soma) desses conjuntos pertencente a C.

No exemplo da observação anterior a cadeia aí considerada não possuía a propriedade ψ*, seja ascendente seja descendente, uma vez que $\cap B^r_x = {}^*B^{r0}_x = \{y \in R^n: d(x\ y) \leq r_0\}$ e $\cup B^r_x = {}^*B^{r1}_x = \{y \in R^n : d\ (x\ y) \leq r_1\}$ e tanto ${}^*B^{r0}_x$ como ${}^*B^{r1}_x$ não pertencem à classe.

Mas já a classe $\mathsf{C} = \{\{x\}, {}^*B^{r1}_x\}$ constituída por todos os ${}^*B^r_x = \{y \in R^n: d\ (x\ y) \leq r\}$ com $0 \leq r < r_1$ ($0 < r \leq r_1$) tem a propriedade ψ* descendente (ascendente).

[2] Este conceito de intersecção nada tem a ver com a intersecção de conjuntos. Daí o termos chamado desde o início "multiplicação" a esta última operação e o seu resultado "produto".

DEFINIÇÃO 5*: Quando uma cadeia tem simultaneamente a propriedade ψ^* ascendente e descendente diz-se que tem a propriedade ψ^*.

Observação: é fácil de ver que se uma cadeia tem a propriedade ψ^* qualquer subcadeia completa também a tem.

Podemos agora avançar para o já mencionado conceito de intersecção.

DEFINIÇÃO 6: Seja $\mathsf{M} \subset 2^1$ não vazia e seja uma cadeia $\mathsf{C} = \{P_0\ P_1\}$. Diz-se que C **intersecta** M num conjunto $M \in \mathsf{M} \cap \mathsf{C}$ se for verdadeira uma das seguintes situações, a) ou b):

a) Existe um intervalo (fechado) [N, M] N, $M \in \mathsf{c}$ $N \neq M$, tal que $[N, M] \cap \mathsf{M} = \{M\}$ ou um intervalo (fechado) [M, N*] com N*, $M \in \mathsf{C}$, $N^* \neq M$ tal que $[M, N^*] \cap \mathsf{M} = \{M\}$.

b) $M = P_0$ ou $M = P_1$

Observação: Para uma melhor compreensão do conceito poderá imaginar-se M como sendo um conjunto de R^n e C como sendo uma recta. Trata-se apenas, como é evidente, de uma mera analogia e não de uma equivalência.

A definição apresentada permite-nos demonstrar o seguinte importante teorema:

TEOREMA 6: Seja P uma classe convexa. Seja C uma qualquer cadeia de conjuntos. Então P ou não é intersectada ou é intersectada em não mais de dois conjuntos pela cadeia C.

Demonstração:

Suponhamos que existem dois conjuntos P_0 e P_1, com $P_0 \subset P_1$, de intersecção entre P e C, o que implica $P_0\ P_1 \in \mathsf{P} \cap \mathsf{C}$. Suponhamos que existia um terceiro conjunto P_2. Sem perda de generalidade, $P_0 \subset P_2 \subset P_1$.

Então, estaremos na situação a) da definição anterior e terá de existir um intervalo $[N, P_2]$ (ou $[P_2, N^*]$) sem conjuntos de P à excepção de P_2, com N (ou N*) $\in \mathsf{C}$. Mas como P é convexa e P_0 e P_2 (ou P_2 e P_1) pertencem a P, isto significaria que não haveria conjuntos de 2^1 em $[N, P_2]$ (ou $[P_2, N^*]$), o que é impossível pois N (ou N*) $\in 2^1$. Podemos assim afirmar que não existem mais de dois conjuntos de intersecção entre C e P quando P é convexa .

Este teorema dá-nos maior conhecimento sobre as propriedades das classes convexas e abre-nos a porta para algumas definições importantes propostas por analogia com os espaços topológicos.

DEFINIÇÃO 7: **Fronteira** de uma classe M é a classe de todos os conjuntos M em que M é conjunto de intersecção de M com todas as cadeias com a propriedade ψ^* a que M pertence. Designaremos a fronteira de M por $\mathsf{F}(\mathsf{M})$.

A existência de uma fronteira para $\mathcal{M}$ chama naturalmente a atenção para a possibilidade e a utilidade de definir uma classe interior e uma classe exterior para qualquer classe $\mathcal{M}$. Por isso temos as seguintes definições:

DEFINIÇÃO 8: Seja $M \in \mathcal{M}$. diz-se que M tem a **propriedade ψ* em $\mathcal{M}$** se e só se M faz parte de uma cadeia de conjuntos de $\mathcal{M}$ que tem a propriedade ψ*, não sendo, contudo, extremo da cadeia.

DEFINIÇÃO 9: **Interior** de uma classe $\mathcal{M}$ é a classe $\mathcal{Y}(\mathcal{M})$ de todos os conjuntos de $\mathcal{M}$ que têm a propriedade ψ* em $\mathcal{M}$.

DEFINIÇÃO 10: Seja $M \in \mathcal{M}$. Diz-se que M é um **conjunto isolado** se e só se não existe nenhuma cadeia de conjuntos de 2^1 com a propriedade ψ* a que M pertença.

DEFINIÇÃO 11: **Exterior** de uma classe $\mathcal{M}$ é a classe $\mathcal{E}(\mathcal{M})$ de todos os conjuntos isolados pertencentes a $\mathcal{M}$.

Com estas definições obtemos o seguinte teorema fundamental:

TEOREMA 7: Se $\mathcal{P}$ for uma classe convexa, tem-se:

a) $\mathcal{P} = \mathcal{F}(\mathcal{P}) \cup \mathcal{Y}(\mathcal{P}) \cup \mathcal{E}(\mathcal{P})$

b) $\mathcal{F}(\mathcal{P}) \cap \mathcal{Y}(\mathcal{P}) = \mathcal{F}(\mathcal{P}) \cap \mathcal{E}(\mathcal{P}) = \mathcal{Y}(\mathcal{P}) \cap \mathcal{E}(\mathcal{P}) = \varnothing$

Demonstração de a):

Basta demonstrar a inclusão $\mathcal{P} \subset \ldots$, uma vez que a inclusão recíproca é imediata por definição de fronteira, interior e exterior.

Seja então $P \in \mathcal{P}$.

Temos a seguinte árvore de situações possíveis:

Situação 1: Existe pelo menos uma cadeia de conjuntos com a propriedade ψ* a que P pertence.

Esta situação subdivide-se em duas possibilidades:

Situação 1.1: Existe pelo menos uma cadeia $\mathcal{C}$, com a propriedade ψ* e a que P pertence que está contida em $\mathcal{P}$. Esta situação ainda se subdivide em duas:

Situação 1.1.1: Para todas as $\mathcal{C}$ nestas circunstâncias, P é um seu extremo.

Situação 1.1.2: Existe pelo menos uma $\mathcal{C}$ nessas circunstâncias para a qual P não é extremo.

Temos agora a situação 1.2:

Situação 1.2: Nenhuma cadeia com a propriedade ψ* a que P pertença está contida em $\mathcal{P}$.

Finalmente, temos a situação 2:

Temos assim de demonstrar esta alínea a) para quatro situações: 1.1.1, 1.1.2, 1,2 e 2.

Na situação 1.1.1, para $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}$, P é por definição conjunto de intersecção de $\mathcal{C}$ com $\mathcal{P}$. Para as outras cadeias $\mathcal{D}$ não contidas em $\mathcal{P}$, mas com a propriedade ψ*, a que P pertença, temos duas possibilidades.

Se $\mathcal{D}$ tem uma subcadeia com a propriedade ψ* contida em $\mathcal{P}$ a que P pertence, então, P, por hipótese, será extremo desta subcadeia e, como é fácil de ver, será conjunto de intersecção de $\mathcal{D}$ com $\mathcal{P}$.

Com efeito, suponhamos que o extremo inferior de $\mathcal{D}$, D_0, é diferente de P (se for o superior a demonstração é igual, um deles pelo menos tem de ser diferente, de outra forma $\mathcal{D}$ estaria contida em $\mathcal{P}$). Então, não pode haver nenhum conjunto.

Situação 2: Não existe nenhuma cadeia com a propriedade ψ* a que P pertença. de 2^1 entre D_0 e P, diferente de P, que pertença a $\mathcal{P}$, pois, se houvesse, pela convexidade de $\mathcal{P}$, haveria uma cadeia com a propriedade ψ* contida em $\mathcal{P}$ a que P pertenceria sem ser extremo. Logo, P é conjunto de intersecção. Se $\mathcal{D}$ não tem nenhuma subcadeia com a propriedade ψ* nessas condições ver-se-à a seguir (situação 1.2), por um argumento semelhante ao anterior, que P também é conjunto de intersecção, pelo que, reunindo as três possibilidades, se conclui que P pertence a $\mathcal{F}(\mathcal{P})$.

Na situação 1.1.2, por definição, P pertence a $\mathcal{Y}(\mathcal{P})$.

Na situação 1.2, é de novo conjunto de intersecção de $\mathcal{C}$ com $\mathcal{P}$.

Com efeito, seja $C \in \mathcal{C}$, com $C \notin \mathcal{P}$ e, para fixar ideias, com $C \subset P$ (a demonstração seria idêntica na inclusão recíproca). Suponhamos que P não é extremo superior de $\mathcal{C}$ (se o for é imediatamente, por definição, conjunto de intersecção). Então, dados quaisquer D e E $\in 2^1$ com $C \subset D \subset P \subset E$, E, $D \neq C$, P (e existem sempre conjuntos, inclusivamente pertencentes a $\mathcal{C}$, nessas circunstâncias, pois $\mathcal{C}$ tem a propriedade ψ* e P não é extremo superior de $\mathcal{C}$), tem-se D ou E $\notin \mathcal{P}$ pois, dada a convexidade de $\mathcal{P}$, se os dois lhe pertencessem, isso implicaria a existência de uma subcadeia completa de $\mathcal{C}$ com a propriedade ψ* contida no intervalo [D, E] $\subset \mathcal{P}$, pertencendo P a essa subcadeia, o que está arredado, por hipótese, nesta situação.

Então ou D ou E não pertence a $\mathcal{P}$ e portanto P é sempre conjunto de intersecção de $\mathcal{C}$ com $\mathcal{P}$ e, portanto pertence a $\mathcal{F}(\mathcal{P})$.

Falta-nos só a situação 2. Mas neste caso, por definição, P pertence ao exterior de $\mathcal{P}$,
$\mathcal{E}(\mathcal{P})$, o que demonstra a alínea a). Vamos agora à alínea b).

Se $P \in \mathcal{F}(\mathcal{P})$, por definição, existe uma cadeia de conjuntos com a propriedade ψ* tal que, ou P ou é extremo dessa cadeia, ou tem à sua direita ou à sua esquerda um intervalo sem conjuntos de $\mathcal{P}$ além de P. Mas então, por ser $\mathcal{P}$ convexa, não pode haver nenhum conjunto de $\mathcal{P} \cap \mathcal{C}$ respectivamente à direita ou à esquerda de P, pelo que, em todos os casos, se $P \in \mathcal{F}(\mathcal{P})$, $P \notin \mathcal{Y}(\mathcal{P})$. As igualdades $\mathcal{Y}(\mathcal{P}) \cap \mathcal{E}(\mathcal{P}) = \varnothing$ e $\mathcal{F}(\mathcal{P}) \cap \mathcal{E}(\mathcal{P}) = \varnothing$ são imediatas por definição .

<u>Observações</u>:

i) Repare-se que o facto de $\mathcal{P}$ ser convexa é essencial para provar a alínea a) do teorema, conforme se pode verificar pelo seguinte contraexemplo.

Seja $1 = R^n$ e $\mathcal{C} = \{B^r{}_x\}$, com $B^r{}_x = \{y \in R^n : d(x,y) \leq r\}$ com $r_0 \leq r \leq r_1$ para todos os r reais e com r_0 e r_1 não racionais. Seja $\mathcal{P} = \{B^{r^*}{}_x\}$ para os r* racionais tais que $r_0 < r^* < r_1$. $\mathcal{P}$ não é convexa. Consideremos um $P = B^{r^*}{}_x \in \mathcal{P}$. Evidentemente, $P \notin \mathcal{F}(\mathcal{P})$. Com efeito, P não é conjunto de intersecção de $\mathcal{C}$ e $\mathcal{p}$ pois, por um lado, P não é extremo de $\mathcal{C}$ (que tem a propriedade ψ^*) e, por outro lado, não é possível encontrar $N \in \mathcal{C}$, $N \neq P$ tal que exista um intervalo[N, P] ou [P, N] tal que [N, P] (ou [P, N]) $\cap\ \mathcal{P} = \{P\}$. Finalmente, é fácil de ver que $P \notin \mathcal{Y}(\mathcal{P})$ e, além disso. que $P \notin \mathcal{E}(\mathcal{P})$, pois, neste caso, existe uma cadeia com a propriedade ψ^* a que P pertence.

ii) É imediato verificar que se $\mathcal{P}$ for uma classe convexa e se $\mathcal{C}$ for uma cadeia com a propriedade ψ^* que intersecta $\mathcal{P}$ em M e N, $M \subset N$, então a classe $\{M, N\} - \{M\} - \{N\}$ em que $\{M, N\}$ é a subcadeia completa de $\mathcal{C}$ com extremos M e N, está contida em $\mathcal{Y}(\mathcal{P})$.
O teorema 7 dá-nos a possibilidade de identificar o domínio onde estudaremos as funções de conjunto definidas sobre classes convexas. Tanto poderemos escolher conjuntos pertencentes á Fronteira de $\mathcal{P}$-e então teremos algumas condicionantes derivadas do carácter de extremo desses conjuntos -ou teremos conjuntos do interior de $\mathcal{P}$-e então, tal como na análise das funções de ponto, teremos maiores possibilidades, por exemplo nas operações de derivação. Ficam inteiramente excluídos da análise conjuntos isolados.
Também se torna agora mais claro que o estudo de uma função de conjunto numa classe convexa terá de ser realizado fundamentalmente em termos "direccionais", isto é, segundo cadeias de conjuntos e daí a necessidade do estudo que fizemos das relações entre cadeias e classes convexas.

Para finalizar esta secção, introduzimos um teorema muito simples mas que pode ser útil nas aplicações.

TEOREMA 8: Seja $M \in \mathcal{Y}(\mathcal{M})$ e seja $\mathcal{M}^*$ a classe dos complementares dos conjuntos de $\mathcal{M}$. Então, $1 - M \in \mathcal{Y}(\mathcal{M}^*)$.

Demonstração:

Tem-se, para uma certa cadeia com a propriedade ψ^*, $C_0 \subset M \subset C_1$, donde
$1 - C_1 \subset 1\text{-}M \subset 1 - C_0$ e, pelas leis de De Morgan, a cadeia dos complementares também tem a propriedade ψ^*, pelo que $1 - M \in \mathcal{Y}(\mathcal{M}^*)$.

Podemos agora entrar no estudo de algumas funções de conjunto convexas.

3. FUNÇÕES DE CONJUNTO CONVEXAS

O objecto desta secção é o estudo de um certo tipo de funções de conjunto, as funções de conjunto convexas ou côncavas.

Como se verá, iremos aliás reduzir o estuda das côncavas ás convexas, pelo que podemos centrar-nos apenas no estudo destas.

Começaremos pela definição de função de conjunto

DEFINIÇÃO 12: Seja $\mathcal{M} \subset 2^1$. λ (M) é uma função de conjunto definida sobre $\mathcal{M}$ se a cada M $\in \mathcal{M}$ fizer corresponder um número real λ (M), $|\lambda(M)| < +\infty$.

Temos a seguir o conceito de função monótona.

DEFINIÇÃO 13: $\lambda(M)$ é **monótona crescente** (decrescente) sobre $\mathcal{M}$ se, com M_1, $M_2 \in \mathcal{M}$, e $M_1 \subset M_2$ se tem $\lambda(M_1) \leq \lambda(M_2)$ ($\lambda(M_1) \geq \lambda(M_2)$).

Podemos agora definir o conceito básico de toda esta secção, ou seja, função de conjunto convexa.

DEFINIÇÃO 14: Seja $\mathcal{P}$ uma classe convexa e μ uma função crescente definida nessa classe. A função de conjunto λ definida sobre $\mathcal{P}$ é **convexa em relação a μ** se e só se quaisquer que sejam P_0 e $P_1 \in \mathcal{P}$ com $P_0 \subset P_1$ e $\mu(P_0) \neq \mu(P_1)$ se tem

$$[\lambda (P) - \lambda(P_0)] / [\mu(P) - \mu(P_0)] \leq [\lambda(P_1) - \lambda(P_0)] / [\mu(P_1) - \mu(P_0)]$$

para qualquer P tal que $P_0\, P \subset P_1$ e $\mu (P) \neq \mu(P_0)$ [3].

DEFINIÇÃO 15: Se na definição anterior em a) em vez do sinal "≤" tivermos "≥", a função λ diz-se **côncava** em relação a μ.

Observações:

i) Note-se, em primeiro lugar que λ é convexa em relação a μ se e só se $-\lambda$ é côncava em relação a μ. O que nos permite daqui em diante reduzir o estudo a e uma das categorias. No caso, as funções convexas.

ii) A definição faz sentido uma vez que se admitiu que $\mathcal{P}$ é convexa, o que permite garantir que $P \in \mathcal{P}$ e, por consequência, que existem μ (P) e λ(P). Daí o interesse em termos estudado previamente as classes convexas.

iii) A definição de convexidade é sempre relativa a uma outra função de conjunto μ, ao invés do que sucede nas funções de ponto. Assim, poderá existir uma função λ convexa em relação a μ mas não convexa em relação a outra função μ^*.

iv) Da definição pode imediatamente escrever-se:

$\lambda (P) \leq (1-\theta)\lambda(P_0) + \theta\lambda (P_1)$

com

$\theta = (\mu(P) - \mu(P_0)) / (\mu(P_1) - \mu(P_0))$ e portanto $0 \leq \theta \leq 1$

Esta relação dá-nos a justificação de termos chamado convexas às funções da definição, ou seja existe uma evidente generalização da noção de convexidade em relação às funções de ponto.

Com o conceito de função de conjunto convexa é possível definir, na fronteira ou no interior de uma classe convexa (e aqui está o interesse da análise que fizemos anteriormente sobre estes conceitos) uma derivação direccional de λ em relação a μ da seguinte forma:

---

[3] A convexidade define-se exactamente da mesma forma para as funções definidas em cadeias de conjuntos. Só que aqui poderá haver uma convexidade *forte* em que os conjuntos P_0 e P_1 da definição são quaisquer conjuntos da cadeia (tal como para as classes convexas) e uma convexidade *fraca* em que esses conjuntos são sempre os extremos da cadeia. Para muitas aplicações basta a convexidade fraca. Este, no entanto, é uma assunto que não desenvolveremos no presente trabalho.

contínuas- II [4] definidas em $y(P)$. Diz-se que λ tem derivada esquerda (direita) em relação a μ sobre o conjunto $M \in Y(P)$ segundo a direcção da cadeia $C = \{M_0\, M\}$ ($C = \{M\, M_0\}$) se e só se existe uma sucessão crescente (decrescente) $\{M_n\} \subset C$ a tender para M e se existe o limite:
$\lim (\lambda(M_n) - \lambda(M)) / (\mu(M_n) - \mu(M))$ quando M_n tende para M.

Se λ tiver derivada esquerda e direita em M e forem iguais diz-se que tem derivada em M. Se o conjunto M é da fronteira de P, evidentemente que só poderá haver derivada direita ou esquerda.

A aplicação deste conceito à função supremo Wf(X) permite obter alguns resultados úteis (ver Amaral 1982 para essa aplicação) um dos quais será usado nas secções seguintes.

DEFINIÇÃO 16: Seja P uma classe de conjunto convexa e λ e μ duas funções.

4. A FUNÇÃO WF (X)

Uma das funções de conjunto mais importantes é a função supremo Wf. assim definida: Sendo f uma função real definida num conjunto qualquer X, Wf(X) = sup f(x) para todos os x de X.

Quando Wf é uma função convexa em relação a uma outra função de conjunto tiram-se muitas vezes consequências interessantes.

Por exemplo, seja P uma classe convexa contida em 2^1 e $C = \{C_0\, C_1\}$ uma cadeia de conjuntos contida em P, com a propriedade ψ. Seja f uma função real limitada e definida em 1. Temos o seguinte teorema:

TEOREMA 9: Seja Wf(X) convexa em relação a uma função de conjunto monótona crescente μ contínua-I [5] em C[67]. Então, para cada ε tal que $0 < \varepsilon < Wf(C_1) - Wf(C_0)$, existe uma subcadeia $C^* = \{C_0\, C^*\}$ tal que, para cada $C \in C^*$ se tem

$Wf(C) \leq Wf(C_1) - \varepsilon$, em que C^* é definido por

$\mu(C^*) = [\varepsilon/(Wf(C_1) - Wf(C_0))]\, \mu(C_0) + [1 - \varepsilon / (Wf(C_1) - Wf(C_0))]\, \mu(C_1)$

Demonstração:

Seja um qualquer $C \in C$. Por ser Wf convexa em relação a μ sobre C tem-se

---

[4] Uma função de conjunto μ, qualquer, é contínua-II (nomenclatura nossa) quando, para qualquer sucessão monótona (crescente ou decrescente) $E_1\, E_2, \ldots E_n$,.. de conjuntos a tender para o conjunto E, se tem $\lim \mu(E_n)$ quando $n \to \infty = \mu(E)$ (ver Halmos, 1974 pag 39).

[5] Diz-se que uma função de conjunto μ é contínua -I (nomenclatura nossa) sobre uma classe M se e só se é definida para todos os conjuntos da classe e se. com M_0 e M_1 pertencentes a M, com $M_0 \subset M_1$, se tem, para qualquer número real k tal que $k \in [\min\{\lambda(M_0), \lambda(M_1)\}, \max\{\lambda(M_0), \lambda(M_1)\}]$ que existe $M^* \in M$ tal que $M_0 \subset M^* \subset M_1$ e $\lambda(M^*) = k$.

$(Wf(C) - Wf(C_0)) / (\mu(C) - - \mu(C_0)) \leq (Wf(C_1) - Wf(C_0)) / ((\mu(C_1) - \mu(C_0))$

ou seja,

$Wf (C) \leq [1 - (\mu(C) - \mu(C_0)) / ((\mu(C_1) - \mu(C_0))]Wf(C_0) + (\mu(C) - \mu(C_0)) / (\mu(C_1) - \mu(C_0)) Wf(C_1)$

Assim, para ser $Wf(C) \leq Wf(C_1)-\varepsilon$ basta que

$[1 - (\mu(C) - \mu(C_0)) / (\mu(C_1) - \mu(C_0))]Wf(C_0) + (\mu(C) - \mu(C_0)) / (\mu(C_1) - \mu(C_0))Wf(C_1) \leq Wf(C_1) -\varepsilon$

Ou seja, que

$\mu(C) - \mu(C_0) \leq [1 - \varepsilon / (Wf(C_1) - Wf(C_0))](\mu(C_1) - \mu(C_0))$

por outro lado, como μ é contínua-I existe C* tal que

$\mu(C^*) = \varepsilon / (Wf(C_1) - Wf(C_0))\mu(C_0) + [1 - \varepsilon / (Wf(C_1) - Wf(C_0))]\ \mu\ (C_1)$

e, para $C^{**} \in C^* = \{C_0\ C^*\}$ tem-se

$\mu(C^{**}) - \mu(C_0) \leq \mu(C^*) - \mu(C_0) = [1 - \varepsilon / (Wf(C_1) - Wf(C_0))](\mu(C_1) - \mu(C_0))$

donde

$Wf(C^{**}) \leq WF(C_1) - \varepsilon$

como se queria provar

Este teorema pode ser útil em algumas aplicações como exemplificámos em Amaral (1986).

Mas o interesse da função Wf(X) torna-se maior quando f é uma função real em R^n.

Nesse caso (Amaral 1982) demonstra-se, com a ajuda do conceito de derivada acima exposto, o seguinte teorema.

TEOREMA 10: Seja f uma função real em R^n. Seja $B_r(x_0)$ a esfera fechada com centro no ponto x_0 e raio r. Então se f for convexa, tem-se

$Wf(B_r(x_0)) = f(x_0) + r[\sqrt{(\sum(\partial f/\partial x_{i0})^2} + \eta]$ Em que $\partial f / \partial x_{i0}$ são as derivadas parciais de f calculadas no ponto x_0 e $\eta \rightarrow 0$ quando $r \rightarrow 0$ (demonstração em Amaral 1982).

Teoremas correspondentes podem ser demonstrados para outras famílias de conjuntos que não esferas. Por exemplo, é facilmente demonstrável um teorema semelhante para elipses ou rectângulos e para as figuras correspondentes a maior número de dimensões.

Este tipo de teoremas tem grande aplicação. Vamos dar um exemplo, de seguida, relativo a um problema de Econometria e em que o conjunto em causa é uma esfera (mas de novo se podia obter resultados para outras figuras).

5. UMA APLICAÇÃO: UMA ESTIMAÇÃO DE MÍNIMOS QUADRADOS

Muitas vezes na estimação de funções temos a desconfiança que os dados possam ter alguns erros estatísticos sem que no entanto os possamos determinar. Se admitirmos que os erros, embora desconhecidos, não são muito grandes e que os valores verdadeiros das variáveis se situarão dentro de uma esfera com centro nos valores observados, poderemos melhorar a estimação de mínimos de quadrados utilizando o seguinte processo.

Suponhamos que temos duas variáveis X e Y e uma amostra de n pares de observações (y^*_j x^*_j). Admitimos que existe uma relação linear "verdadeira" entre X e Y dada por $Y = aX$.

Suspeitamos, no entanto, que poderão existir erros nas variáveis observadas e que os verdadeiros valores (y_j, x_j) estarão numa esfera B^r de raio r (relativamente pequeno) e centro ($y_1, \dots y_n, x_1, \dots x_n$).

Se utilizarmos o método dos mínimos quadrados, teremos, assim, a possibilidade de fazer erros adicionais. Por isso será bom considerar a perda máxima que podemos ter na esfera B^r se utilizarmos esse método.

Então, pelo teorema anterior temos que o máximo da função de perda em B^r será

$$Wf(B^r) \equiv g\,(a) \approx \sum (y^*_j - ax^*_j)^2 + 2r[(1 + a^2)]^{1/2}[\sum(y^*_j - ax^*_j)^2]^{1/2}$$

Um critério racional para escolher o estimador de a será determinar um valor a* tal que g(a*) seja um valor mínimo.

Como se vê, é um critério diferente do dos mínimos quadrados quando não há erros nas variáveis. Aqui seguimos um critério de encontrar o estimador que minimize o máximo dos erros que podemos fazer quando usamos as observações. É, pois, um critério mini-max.

Para obtermos o valor de a* derivamos e igualamos a 0 e o valor pretendido para o estimador será a* tal que $m'(a^*) + 2ra^*[m(a^*) / (1 + a^{*2})]^{1/2} + r\, m'(a^*)\,[(1 + a^{*2}) / m(a^*)]^{½} = 0$ em que $m(a^*) \equiv \sum (y^*_j - ax^*_j)^2$.

Este estimador difere dos mínimos quadrados ordinários. Este exige $m'(a^*) = 0$.

Os dois só são idênticos quando, por consequência, $a^* = 0$ ou $m(a^*) = 0$, que são situações em interesse.

5. CONCLUSÃO

Neste trabalho apresentámos mais resultados sobre classes e funções de conjunto convexas e descrevemos uma aplicação ao método dos mínimos quadrados. Outras aplicações se podem realizar, em particular admitindo que os verdadeiros valores das variáveis se situam não numa esfera mas noutro tipo de figura em que um ponto interior é o ponto correspondente às observações.

Julgamos que s análise das funções de conjunto convexas se pode revelar útil também em outros domínios, nomeadamente na integração (quando o integral for uma função de conjunto convexa em relação à medida) e sempre que tivermos de tratar de problemas de maximização ou minimização.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALBUQUERQUE, José; AMARAL, João Ferreira do; RIBEIRO, Carlos Silva (1969)
Classes convexes et fonctions d'ensemble convexes.
Anais do ISCEF vol XXXVII.

AMARAL, João Ferreira do (1982)
Uma aplicação das funções de conjunto convexas.
Estudos de Economia vol III n.º 1.

AMARAL, João Ferreira do (1986)
Um teorema sobre funções de conjunto convexas.
Conferência do CEMAPRE, ISEG

HALMOS, Paul R. (1974)
Measure Theory.
Springer-Verlag