

Análise de Valores Extremos: Uma Introdução

M. Ivette Gomes

C.E.A.U.L. e D.E.I.O., F.C.U.L., Universidade de Lisboa,
Instituto de Investigação Científica Bento da Rocha Cabral

M. Isabel Fraga Alves

D.E.I.O., F.C.U.L. e C.E.A.U.L., Universidade de Lisboa

Cláudia Neves

C.E.A.U.L., Universidade de Lisboa,
DMat, Universidade de Aveiro

Edições SPE

Ficha Técnica:

Análise de Valores Extremos: Uma Introdução¹

M. Ivette Gomes

C.E.A.U.L. e D.E.I.O., F.C.U.L., Universidade de Lisboa,
Instituto de Investigação Científica Bento da Rocha Cabral

M. Isabel Fraga Alves

D.E.I.O., F.C.U.L. e C.E.A.U.L., Universidade de Lisboa

Cláudia Neves

C.E.A.U.L., Universidade de Lisboa,
DMat, Universidade de Aveiro

Editora: Sociedade Portuguesa de Estatística

Capa: Carina Sousa

Impressão: Instituto Nacional de Estatística

Tiragem: 200 exemplares

ISBN: 978-972-8890-30-8

Depósito Legal: 366446/13

¹Investigação parcialmente financiada pelos fundos nacionais da **FCT**—Fundação para a Ciência e a Tecnologia, projecto PEst-OE/MAT/UI0006/2011, EXTREMA, PTDC/MAT/101736/2008 e PTDC/MAT/112770/2009: EXTREMES IN SPACE.

Conteúdo

1	Comentários Bibliográficos	1
1.1	Tópicos a abordar	4
2	Motivação	7
2.1	Katrina: Um desastre (não) natural?	7
2.2	Extremos no mercado financeiro	9
2.3	EVT: porque nem tudo é normal!	11
2.4	Estatísticos históricos na área de extremos	14
3	Metodologias Gráficas em APVE	17
3.1	Papel de probabilidade	18
3.1.1	Referência histórica aos papéis de probabilidade	20
3.2	QQ-plots: outra perspectiva equivalente	26
3.2.1	QQ-plot: modelo Exponencial	26
3.2.2	QQ-plot: caso geral	29
3.2.3	QQ-plots para modelos Normal e Log-Normal	30
3.2.4	QQ-plot: Tabela de distribuições	31
3.3	QQ-plots e PP-plots: caso geral $F(\cdot \theta)$	31

3.4	W-plots: caso geral $F(\cdot \theta)$	33
3.5	Função de excesso médio e ME-plot	34
3.5.1	ME-plots — <i>mean excess plots</i>	34
3.5.2	Padrões das funções de excesso médio	35
3.5.3	Funções de excesso médio — modelo Weibull	36
3.6	Caudas HTE/LTE	36
3.7	Dados hidrológicos — parâmetros de interesse	36
3.7.1	Dados de máximos anuais	37
3.8	Dados financeiros	38
4	APVE — O Porquê da EVT	41
4.1	Problemas simples em valores extremos	41
4.1.1	Escassez de dados nas caudas	42
4.1.2	Metodologias tradicionais inadequadas	42
4.2	Velocidade máxima de vento em Albuquerque	43
4.3	Velocidade máxima de vento em Zaventem	45
4.4	Seguros de incêndios	49
4.5	Descargas anuais máximas do rio Meuse	51
5	Teoria Distribucional Exacta	55
5.1	Comportamento de uma estatística ordinal	55
5.1.1	Relação com os modelos Binomial e Beta	56
5.2	Distribuição conjunta de estatísticas ordinais	60
5.2.1	Estatísticas ordinais em modelo Uniforme	61
5.2.2	Estatísticas ordinais em modelo Exponencial	65
5.2.3	Estatísticas ordinais em modelo Pareto	68
5.3	Momentos de estatísticas ordinais	71
5.3.1	Relações de controlo	72
5.3.2	Relações simplificativas	73

5.3.3	Relações de cálculo efectivo	74
5.3.4	Momentos em modelo Uniforme	78
5.3.5	Momentos em modelo Exponencial	80
5.3.6	Momentos em modelo Pareto	84
5.4	Estrutura markoviana das estatísticas ordinais	84
5.4.1	Estatísticas ordinais e processo de Poisson	84
5.4.2	Estatísticas ordinais como processo de Markov	86
5.4.3	Uma cadeia de Markov aditiva	89
5.5	Estatísticas sistemáticas	90
5.5.1	Distribuição de amostragem da amplitude e estatísticas similares	91
5.5.2	Amplitude e escala	92
5.5.3	Espaçamentos de estatísticas ordinais	94
5.5.4	O método de Steutel	97
5.6	Enquadramentos e aproximações	99
5.6.1	Enquadramentos ‘distribution-free’	99
5.6.2	Aproximações para os momentos	102
5.7	O Teorema de Malmquist e simulação	104
6	Teoria Distribucional Assintótica	107
6.1	Introdução	107
6.2	Modelos particulares e método de Rényi	109
6.2.1	O modelo Exponencial, $\mathcal{E}(1)$	109
6.2.2	O modelo Uniforme, $\mathcal{U}(0, 1)$	111
6.3	Estatísticas ordinais centrais (quantis)	114
6.4	Teoria assintótica de valores extremos	117
6.4.1	O teorema de Gnedenko	118
6.4.2	Modelo de valores extremos e índice de valores ex- tremos	124

6.4.3	Teorema unificado dos tipos extremais para mínimos . .	125
6.4.4	Caracterização de max-domínios de atracção e coeficientes de atracção	126
6.4.5	Condições suficientes de von Mises para $F \in \mathcal{D}_{\mathcal{M}}(G_{\gamma})$.	132
6.4.6	Níveis normalizados e a distribuição limite no modelo Normal	135
6.4.7	Carácter poissoniano de excedências de níveis elevados .	138
6.4.8	Distribuição assintótica de $X_{k:n}$ e $X_{n-k+1:n}$, k fixo . . .	139
6.4.9	Distribuição assintótica conjunta de estatísticas ordinais superiores e inferiores	142
6.4.10	Teorema Pickands-Balkema-de Haan	144
6.5	Estatísticas ordinais intermédias	145
6.6	Esquemas originais não i.i.d.	145
6.7	Estatísticas sistemáticas	152
7	Abordagens Paramétricas	155
7.1	Parâmetros de acontecimentos extremos	155
7.2	Método dos máximos anuais	157
7.2.1	Modelos Gumbel, Fréchet, Max-Weibull e GEV: principais características	161
7.2.2	Estimação dos parâmetros em modelos extremais clássicos	163
7.2.3	Modelo GEV: Método ML	165
7.2.4	Modelo GEV: Método PWM	166
7.2.5	Intervalos de confiança para os parâmetros da GEV . .	167
7.3	Abordagens não clássicas	170
7.3.1	Modelo GEV multivariado e multidimensional	172
7.3.2	A metodologia POT e o modelo GP	174
7.4	Breve referência à estimação do índice extremal	181

7.5	Estimação do CTE	182
7.6	Breve referência a extremos bivariados	183
7.7	Resumo	184
8	Abordagem Semi-Paramétrica	187
8.1	Condições de segunda ordem e de ordem superior	188
8.2	Estimação semi-paramétrica do EVI	189
8.2.1	O estimador de Hill (H)	189
8.2.2	O estimador de Pickands (P)	189
8.2.3	O estimador dos Momentos (M)	190
8.2.4	O estimador POT-ML (ML)	191
8.2.5	Normalidade assintótica dos estimadores	192
8.2.6	ICs semi-paramétricos e assintóticos para o EVI	192
8.2.7	Observações adicionais	193
8.3	Estimação de outros parâmetros	194
8.3.1	Estimação de quantis extremos	195
8.3.2	Estimação semi-paramétrica do limite superior do su- porte	196
8.3.3	Estimação semi-paramétrica da probabilidade de exce- dência	197
8.4	Invariância versus não-invariância	199
9	Casos de Estudo	201
9.1	Dados ‘maasmax.txt’	201
9.2	Caso de Estudo: ‘venice, library(ismev)’	221
9.3	Um novo caso de estudo: ‘soa.txt’	233
	Bibliografia	255
	Índice Remissivo	263

Prefácio

Neste texto procedemos em grande parte a uma compilação do material lecionado em cadeiras das áreas de *Estatísticas Ordinais*, de *Teoria de Valores Extremos*, de *Estatística de Extremos* e de *Modelação de Acontecimentos Raros*, ampliado com alguns desenvolvimentos recentes.

Trata-se de um manual de trabalho, ainda em fase embrionária, em que se procurou encontrar um compromisso entre o rigor teórico e uma abordagem intuitiva às áreas em estudo, disseminando técnicas simples, mas poderosas da área de *Estatística de Extremos*, que têm sido largamente utilizadas nos mais variados campos, entre os quais destacamos *Ciências Ambientais*, *Finanças* e *Seguros*.

Começamos por apresentar no Capítulo 2 alguma *Motivação* para a necessidade da *Teoria de Valores Extremos* (TVE), muito frequentemente denotada EVT, do inglês ‘*Extreme Value Theory*’. No Capítulo 3 avançamos com algumas *Técnicas Gráficas* usadas na análise preliminar de qualquer tipo de dados, tais como os QQ-plots e os PP-plots, e *Técnicas Gráficas* específicas da área de valores extremos, como os ME-plots e os W-plots. No Capítulo 4, através de alguns exemplos de aplicação a dados univariados, tentamos responder à pergunta *Porquê a Teoria de Valores Extremos?* Mas em EVT, e mais geralmente, em quase todos as áreas da *Estatística*, a ordenação de uma amostra aleatória univariada, como base para uma representação clara do conteúdo dessa amostra, é crucial. Tal justifica a consideração dos Capítulos 5 e 6, respectivamente sobre o *Comportamento Distribucional Exacto* e o *Comportamento Distribucional Assintótico* das estatísticas ordinais. Finalmente, nos Capítulos 7, 8 e 9, debruçamo-nos sobre *Estatística de Extremos*, área de grande utilidade em aplicações quando se pretende inferir na cauda de um modelo, estimando parâmetros de acontecimentos raros, como por exemplo quantis elevados ou períodos de retorno de níveis elevados. No Capítulo 7, abordamos as perspectivas paramétricas de inferência estatística em acontecimentos raros. O Capítulo 8 é dedicado a alguns métodos de inferência semi-paramétrica. Finalmente, no Capítulo 9, procedemos à análise de três casos de estudo.

O texto é, como convém, consideravelmente mais ambicioso do que será o

curso breve no XXI *Congresso Anual da Sociedade Portuguesa de Estatística*. Fica no entanto como elemento de referência para os interessados, enquanto num curso de algumas horas, mesmo intensivas e com a celeridade que uma audiência conhecedora impõe, apenas os tópicos mais relevantes podem ser abordados. Qualquer curso é um compromisso, procurando um equilíbrio pessoal (neste caso de uma trindade geracional) entre o que é reconhecidamente fundamental e imprescindível, e os gostos e interesses de quem o escreve. Assim, ficaram naturalmente de fora questões muito importantes mas que não serviam o nosso *puzzle*, tal como ficaram de fora questões que estão entre os nossos interesses directos de investigação, tais como como estimação de viés reduzido, utilização de metodologias de re-amostragem, como o bootstrap e o jackknife em *Estatística de Extremos*, entre outros, mas que certamente iriam desequilibrar a dinâmica do texto.

Não é decerto por ingratidão, mas em todo o rol de agradecimentos há esquecimentos. Por isso preferimos os *clichés*: às nossas famílias e aos nossos amigos, aos nossos mestres, aos nossos colegas, aos nossos alunos.

Agradecemos por outro lado à *Sociedade Portuguesa de Estatística* (SPE) e aos organizadores do XXI *Congresso Anual da SPE* esta honra que nos conferiram. Agradecemos também o apoio institucional do CEAUL — Centro de Estatística e Aplicações da Universidade de Lisboa. E, claro, as palavras mágicas e o logotipo: Esta investigação foi parcialmente subsidiada por **FCT** — Fundação para a Ciência e a Tecnologia, projectos PEst-OE/MAT/UI0006/2011, EXTREMA, PTDC/MAT/101736/2008 e PTDC/MAT/112770/2009: EXTREMES IN SPACE.

FCT Fundação para a Ciência e a Tecnologia

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA

M. Ivette Gomes
M. Isabel Fraga Alves
Cláudia Neves