ESTIMAÇÃO DE ESTADO EM MODELOS LINEARES POR BOCADOS EM TEMPO DISCRETO: COMPARAÇÃO NUMÉRICA DE DOIS PROCEDIMENTOS

DISCRETE-TIME PIECEWISE LINEAR FILTERING: NUMERICAL COMPARATION BETWEEN TWO PROCEDURES

Autora: Rita Cristina Pinto de Sousa
- Técnica Superior de Informática - Direcção Regional do Norte do Instituto Nacional de Estatística

RESUMO:

- O problema de estimação de estado em modelos lineares por bocados parcialmente observados em tempo discreto e com pequeno ruído de observação é tratado neste artigo. Para resolver um problema deste tipo há primeiro que seleccionar os intervalos de linearidade, nos quais podemos aproximar o filtro óptimo pelo correspondente filtro de Kalman-Bucy. Na separação de intervalos de linearidade, o problema consiste em decidir qual dos filtros deve ser aplicado. Dois tipos de testes são propostos para este fim: teste da razão de verosimilhança e teste de variação quadrática. Neste trabalho apresentamos e comparamos o desempenho destes testes com base em simulações numéricas.

PALAVRAS-CHAVE:

- *Estimação de estado, filtro de Kalman-Bucy, teste da razão de verosimilhança, teste de variação quadrática.*

ABSTRACT:

- This article regards a piecewise linear discrete time filtering problem with small observation noise. It is possible to separate the time intervals of linearity of the model and we can then approximate, over such an interval, the optimal filter by the corresponding Kalman-Bucy filter. When separating the intervals of linearity, the problem is to decide wich filter must be applied. Likelihood ratio and quadratic variation tests are proposed for this purpose. We present and compare the performance of both tests numerically, based on simulation results.

KEY-WORDS:

- *State estimation, Kalman-Bucy filter, likelihood ratio test, quadratic variation test.*

1. INTRODUÇÃO

Neste trabalho propomo-nos efectuar o estudo da estimação das variáveis de estado para um modelo de Markov escondido não linear em tempo discreto, em que as funções que o descrevem são lineares por bocados. Tomamos, portanto, como ponto de partida um modelo de Markov escondido (HMM - *Hidden Markov Model*), isto é, um processo estocástico, neste caso em tempo discreto, constituído por uma sequência de estados, não observáveis, que representa o processo de Markov e por uma outra sequência de variáveis aleatórias condicionalmente independentes, que representa o processo das observações. Nos modelos lineares gaussianos podemos recorrer ao filtro de Kalman-Bucy para estimar o estado em cada instante e respectiva covariância de erro de estimação. Nos modelos não lineares utiliza-se geralmente uma solução aproximada para o problema de estimação (Andrews-Grewal, 1993, Harvey, 1989 e Jazwinski, 1970, entre outros). De entre as aproximações possíveis o chamado Filtro de Kalman Estendido é uma das mais usadas pelas suas propriedades (Picard, 1991). Exemplos da aplicação do Filtro de Kalman Estendido em modelos não lineares podem ser encontrados por exemplo em Sorenson (1990). Existem diversos tipos de modelos não lineares, como é o caso dos modelos de limiar ("threshold"), aqui em estudo [1]. Trataremos assim, o caso em que as funções que descrevem o modelo são lineares por bocados. Neste caso, para obter as estimativas é necessário decidir sobre a região onde se situam as variáveis de estado. Sem perda de generalidade suporemos que estas regiões são $\Re^-$ ou $\Re^+$, que estão portanto separadas pelo limiar zero. Então, a estimação deverá ser precedida por dois testes, um para a detecção de passagens em zero e outro para a decisão sobre o sinal do estado, nos intervalos sem cruzamentos em zero. No que respeita ao primeiro teste, temos à escolha entre dois tipos de teste: um teste sobre as observações ou um teste sobre o estimador de Kalman-Bucy. Na decisão sobre o sinal do estado podemos também optar entre dois testes, o da razão de verosimilhança e o de variação quadrática. Quer os testes de passagens em zero quer os testes de decisão sobre o sinal foram estudados em Fleming *et al.* (1991), Oliveira-Roubaud (1991) e Oliveira (2000) para modelos discretos e em Fleming-Pardoux (1989), Fleming *et al.* (1988), Pardoux-Roubaud (1991) e Roubaud (1992 e 1995) para os análogos modelos contínuos. Em qualquer dos casos, estes métodos só podem ser aplicados se se verificar uma hipótese, dita hipótese de detectabilidade, genericamente designada por (HD). Existem dois tipos diferentes de hipóteses de detectabilidade, (HD1) e (HD2), conforme veremos na secção seguinte.

O principal objectivo deste trabalho consiste em analisar e comparar o comportamento destes dois testes de decisão sobre o sinal, baseados nas observações, (razão de verosimilhança e variação quadrática) na resolução do problema de estimação, face à hipótese de detectabilidade (HD2). Os resultados numéricos apresentados baseiam-se na simulação de alguns modelos e permitem fazer uma análise comparativa do desempenho dos testes em estudo. Para um estudo idêntico sob a hipótese (HD1) consultar Fleming *et al.* (1991).

Este trabalho divide-se em 7 secções que se distribuem da seguinte forma. Após esta breve introdução formulamos o problema em estudo na secção 2. Os filtros de Kalman-Bucy em paralelo, usados na estimação, são apresentados na secção 3. As secções 4 e 5 contêm o teste de detecção de passagens em zero e os testes de decisão sobre o sinal, respectivamente. Nestes últimos, podemos separar o teste da razão de verosimilhança (secção 5.1) e o teste de variação quadrática (secção 5.2). Na secção 6 são apresentados e analisados os resultados numéricos obtidos em alguns modelos, em que o método exposto foi aplicado. Por fim são apresentadas conclusões sobre o desempenho dos testes em estudo (secção 7).

[1] Veja-se, em Tong-Yeung (1989), um exemplo de aplicação destes modelos na área financeira.

2. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Consideremos o seguinte modelo contínuo não linear:

$$\begin{cases} d\widetilde{X}_t = b(\widetilde{X}_t)dt + \sigma(\widetilde{X}_t)dU_t, \ 0 \le t \le T \\ d\widetilde{Y}_t = h(\widetilde{X}_t)dt + \varepsilon\, dV_t \ , \end{cases} \qquad \textbf{(2.1)}$$

no intervalo [0,T], em que os processos $\{U_k, k \ge 0\}$ e $\{V_k, k \ge 0\}$ são processos de Wiener standard independentes, com valores em $\Re$ e Δt é um parâmetro positivo próximo de zero. Considerando uma discretização, no intervalo de tempo contínuo [0,T], com $\Delta t = \varepsilon$, obtém-se o seguinte modelo não linear em tempo discreto:

$$\begin{cases} X_{k+1} = X_k + \varepsilon b(X_k) + \sqrt{\varepsilon}\sigma(X_k)u_k, \quad k = 0,1,2,..., \mathrm{K} \\ Y_k = h(X_k) + \sqrt{\varepsilon}v_k \ , \end{cases} \qquad \textbf{(2.2)}$$

em que $\{X_k, k \ge 0\}$ e $\{Y_k, k \ge 0\}$ são processos estocásticos que tomam valores em $\Re$. Suponhamos que estes correspondem aos processos de estado e de observação, respectivamente. As sequências $\{u_k\}_k$ e $\{v_k\}_k$ são processos estocásticos que pretendem modelar perturbações, ruídos ou incertezas. No nosso caso, são considerados como ruídos brancos gaussianos normalizados e independentes de X_0. Os processos $\{X_k\}_k$ e $\{Y_k\}_k$ são indexados da maneira habitual pelos K+1 instantes, com K=int(T/ε), resultantes da discretização no intervalo contínuo [0,T].

No problema que pretendemos tratar suporemos que as funções b, σ e h são funções reais de variável real lineares por bocados :

- $b(x) = b_- x\big|_{\{x<0\}} + b_+ x\big|_{\{x\ge 0\}}$
- $\sigma(x) = \sigma_-\big|_{\{x<0\}} + \sigma_+\big|_{\{x\ge 0\}}$
- $h(x) = h_- x\big|_{\{x<0\}} + h_+ x\big|_{\{x\ge 0\}}$

O processo estocástico $\{(X_k, Y_k)\}_k$, modelado pelo sistema (2.2), pode ser visto como um modelo de Markov escondido, em que $\{X_k\}_k$ é um processo de Markov em espaço de estados infinito e o processo $\{Y_k\}_k$ corresponde a uma sequência de variáveis aleatórias, dependentes de $\{X_k\}_k$. A designação de modelo de Markov escondido é motivada pelo facto do processo de estado $\{X_k\}_k$ não ser observado, mas existir um processo directamente correlacionado com o mesmo, $\{Y_k\}_k$, que representa as observações do sistema em estudo.

O problema consiste em estimar o processo de estado não observado $\{X_k\}_k$ em cada instante k, dadas as observações até esse mesmo instante. No caso em que o modelo é um sistema linear gaussiano, podemos recorrer ao filtro de Kalman-Bucy que é um estimador óptimo, no sentido do erro quadrático médio (Jazwinski, 1970). Este estimador permite-nos calcular recursivamente as estimativas e respectiva covariância de erro:

$$\hat{X}_{k/k} = E\left[X_k / \gamma_0^k\right]$$
$$\text{e} \quad Q_{k/k} = E\left[(X_k - \hat{X}_{k/k})(X_k - \hat{X}_{k/k})^T / \gamma_0^k\right],$$

assim definidas para os modelos lineares gaussianos multidimensionais, onde γ_0^k é a σ-álgebra das observações até ao instante k. No caso linear gaussiano a lei condicional também é gaussiana e a sua média e matriz de covariância são suficientes para caracterizar essa distribuição, como é bem conhecido, constituindo o filtro proposto por Kalman e Bucy nos anos 60 (Kalman-Bucy, 1961). A necessidade motivada pelas aplicações práticas levou a que a teoria da filtragem linear fosse estendida aos sistemas não lineares dando origem ao filtro de Kalman Estendido (Andrews-Grewal, 1993 e Jazwinski, 1970 entre muitos outros). Embora este filtro, seja em geral eficiente em muitas situações práticas, a sua eficiência não é garantida, dependendo das condições do modelo. Picard (1986) demonstrou que a eficiência se verifica se a função h for injectiva, para além de outras hipóteses de regularidade bastante gerais sobre as funções que intervêm no modelo. Como estamos a lidar com uma função de observação unidimensional linear por bocados, h não será necessariamente injectiva. Quando h não é injectiva (não monótona), ou seja, no nosso caso se $h_- h_+ < 0$, as estimativas para as variáveis de estado não podem ser directamente obtidas pela estimação de $h(X_k)$. Nesta situação, o Filtro de Kalman Estendido não é em geral assimptoticamente eficiente, sendo necessária a determinação da região onde $\{X_k\}_k$ se situa ou, se quisermos, do sinal de $\{X_k\}_{k\geq 0}$ em cada instante. Neste caso, dado que as funções no modelo são lineares por bocados, a ideia é a de considerar um estimador para cada um dos sistemas correspondentes aos (dois) ramos de linearidade das funções. Assim, mantêm-se dois filtros em paralelo, optando-se em cada instante pela aplicação de um ou de outro, consoante se toma a decisão de considerar que o processo evolui numa das regiões $\Re^-$ ou $\Re^+$. É precisamente neste caso que nos situaremos neste trabalho, isto é, admitimos a seguinte hipótese:

$$h_- h_+ < 0 \qquad \text{(H1)}$$

Naturalmente a questão da determinação do sinal do estado passa primeiro pela garantia de se ter uma variância condicional reduzida. Para isso, foram introduzidas duas hipóteses de detectabilidade (Fleming *et al.*, 1991 e Oliveira-Roubaud, 1995). São elas :

$$h_-^2 \sigma_-^2 \neq h_+^2 \sigma_+^2 \qquad \text{(HD1)}$$

$$h_-^2 \sigma_-^2 = h_+^2 \sigma_+^2 \quad \text{e} \quad b_+ \neq b_- \qquad \text{(HD2)}$$

Sob qualquer destas hipóteses é possível, à custa de dois estimadores de Kalman-Bucy em paralelo, obter um estimador convergente, sub-óptimo na classe de estimadores lineares. Para além disso, qualquer das hipóteses apresentadas permite obter intervalos de tempo

suficientemente longos, em que o processo $\{X_k\}_k$ toma valores distantes de zero. Nestes intervalos podemos aplicar os filtros de Kalman-Bucy, ora para um ramo ora para outro, de acordo com o sinal das variáveis de estado nesses intervalos.

No caso da hipótese (HD1), o sinal de X_k é essencialmente determinado atendendo à variação quadrática da função $h(X_k)$. No caso da hipótese (HD2), é a função $b(X_k)$ (observada indirectamente através de Y_k) que contém a informação essencial para a determinação do sinal de X_k, dificultando o processo de estimação. É sob esta hipótese que se situarão os estudos e resultados apresentados ao longo deste artigo.

A obtenção das estimativas para as variáveis de estado do modelo (2.2) passa por duas etapas, que se traduzem em dois testes estatísticos:

1ª etapa: Detectar os intervalos de tempo em que a trajectória de $\{X_k\}_k$ não cruza o nível zero.

2ª etapa: Decidir, para cada um desses intervalos, se se tem $X_k > 0$ ou $X_k < 0$.

Na primeira etapa, utiliza-se um teste de detecção de passagens em zero e na segunda etapa, utiliza-se um teste de decisão sobre o sinal do estado. Na decisão sobre o sinal consideraremos dois tipos de testes: testes de razão de verosimilhança e testes de variação quadrática.

No que diz respeito ao teste de detecção de passagens em zero, estudos anteriores mostram que é possível estender, sem dificuldade, o teste proposto por Fleming et al (1991) sob a hipótese (HD1) ao problema sob a hipótese (HD2) (ver Oliveira-Roubaud, 1995). No que diz respeito ao teste de decisão sobre o sinal Oliveira-Roubaud (1991) propõem, sob a hipótese (HD2), dois testes da razão de verosimilhança e Oliveira (2000) propõe um teste de variação quadrática. O principal objectivo deste estudo consiste em analisar o comportamento do teste de variação quadrática e comparar o seu desempenho com o do teste da razão de verosimilhança, ambos os testes baseados nas observações, sob a hipótese de detectabilidade (HD2).

3. DOIS ESTIMADORES DE KALMAN-BUCY EM PARALELO

A ideia subjacente à utilização do estimador de Kalman Estendido em sistemas não lineares consiste em considerar que, nas vizinhanças de uma estimativa, o sistema não linear se comporta localmente de forma aproximada à do sistema linearizado, de tal forma que, ao aplicar o filtro de Kalman-Bucy correspondente a esse sistema localmente linearizado produzimos estimativas próximas das óptimas no sentido do erro quadrático médio. No nosso caso temos um sistema unidimensional linear por bocados portanto, em cada um desses intervalos de linearidade, a ideia é aplicar o filtro correspondente ao ramo em causa consoante se decide que o processo de estado está num ramo ou no outro. Para tomar estas decisões, que antecedem a aplicação dos filtros, são usados os testes de decisão sobre o sinal, que iremos tratar na secção 5. Para detectar os intervalos de linearidade é usado o teste apresentado na secção 4.

Consideremos dois modelos lineares correspondentes aos ramos em que se separam as funções intervenientes no modelo (2.2). Referenciemo-los como modelo (+) e modelo (-):

(+)
$$\begin{cases} X_{k+1} = (1 + \varepsilon b_+) X_k + \sigma_+ \sqrt{\varepsilon}\, u_k \\ Y_k = h_+ X_k + \sqrt{\varepsilon}\, v_k \end{cases}$$

(-)
$$\begin{cases} X_{k+1} = (1 + \varepsilon b_-) X_k + \sigma_- \sqrt{\varepsilon}\, u_k \\ Y_k = h_- X_k + \sqrt{\varepsilon}\, v_k \end{cases} .$$

Podemos dizer que estes modelos resultam da permanência do processo de estado em $\Re^+$ e $\Re^-$, respectivamente. A separação do modelo original nestes dois modelos dá origem ao aparecimento de dois filtros que terão de ser calculados em simultâneo, um para cada modelo. Daí a designação de filtros de Kalman-Bucy em paralelo.

Sejam $(\hat{X}_k^+, Q^+)$ e $(\hat{X}_k^-, Q^-)$ os filtros associados aos sistemas lineares (+) e (-) :

$$\begin{cases} \hat{X}^+_{k/k} = \hat{X}^+_{k/k-1} + K^+_k (Y_k - h_+ \hat{X}^+_{k/k-1}) \\ Q^+_{k/k} = Q^+_{k/k-1} - Q^+_{k/k-1} h_+ (h_+ Q^+_{k/k-1} h_+ + \varepsilon)^{-1} h_+ Q^+_{k/k-1}, \end{cases} \quad \text{(FKB)}^+$$

com $\hat{X}^+_{k/k-1} = (1+\varepsilon b_+)\hat{X}^+_{k-1/k-1}$, $K^+_k = Q^+_{k/k-1} h_+ (h_+ Q^+_{k/k-1} h_+ + \varepsilon)^{-1}$ e

$$Q^+_{k/k-1} = (1+\varepsilon b_+)^2 Q^+_{k-1/k-1} + \sigma_+{}^2 \varepsilon$$

e

$$\begin{cases} \hat{X}^-_{k/k} = \hat{X}^-_{k/k-1} + K^-_k (Y_k - h_- \hat{X}^-_{k/k-1}) \\ Q^-_{k/k} = Q^-_{k/k-1} - Q^-_{k/k-1} h_- (h_- Q^-_{k/k-1} h_- + \varepsilon)^{-1} h_- Q^-_{k/k-1}, \end{cases} \quad \text{(FKB)}^-$$

com $\hat{X}^-_{k/k-1} = (1+\varepsilon b_-)\hat{X}^-_{k-1/k-1}$, $K^-_k = Q^-_{k/k-1} h_- (h_- Q^-_{k/k-1} h_- + \varepsilon)^{-1}$ e

$$Q^-_{k/k-1} = (1+\varepsilon b_-)^2 Q^-_{k-1/k-1} + \sigma_-{}^2 \varepsilon .$$

As condições iniciais gaussianas que se consideram, habitualmente, são as seguintes :

- $\hat{X}^+_0 = \hat{X}^-_0 = E(X_0)$
- $Q^+_0 = Q^+$ e $Q^-_0 = Q^-$, onde Q^+ e Q^- são as variâncias estacionárias das leis condicionais.

As condições iniciais são importantes apenas no sentido em que influenciam o comportamento inicial do modelo, o que poderá não ser acompanhado pelo estimador, mas o efeito de dependência da condição inicial tende a desaparecer rapidamente no tempo (Oliveira-Roubaud, 1991 e Picard, 1991).

Podemos resumir o processo de estimação em três passos essenciais: a seleccção dos intervalos de tempo em que um dos filtros conduz a uma boa estimativa (teste de detecção de passagens em zero, secção 4), a decisão de qual dos dois filtros se deve aplicar (teste de decisão sobre o sinal do processo não observado, secção 5) e por último, a estimação propriamente dita usando o estimador $\hat{X}_k^+$ ou $\hat{X}_k^-$, consoante o resultado da etapa anterior.

4. TESTE DE DETECÇÃO DE PASSAGENS EM ZERO

Para seleccionar os intervalos de tempo, ditos de linearidade, em que, para uma dada probabilidade próxima de um, o processo de estado não cruza o zero recorremos ao teste de detecção de passagens em zero. Este teste pode ser aplicado às observações ou ao próprio estimador de $\{X_k\}_k$, $\{\hat{X}_k\}_k$, tendo-se neste caso optado por um teste baseado nas observações. No caso em que o teste de detecção é baseado no próprio estimador, o procedimento é basicamente o mesmo, excepto naturalmente no que diz respeito à estatística do teste. Para mais detalhes poderá ser consultado o trabalho desenvolvido por Fleming *et al.* (1991) e Oliveira-Roubaud (1991).

Comecemos por fixar uma trajectória do processo $\{X_k\}_k$ para um modelo de Markov (2.2) que obedece à hipótese de detectabilidade (HD2). No intervalo de tempo contínuo [0,T], consideremos um intervalo [a,b] em que essa trajectória não cruza o zero. A não existência de cruzamentos em zero corresponde à ocorrência de um dos seguintes acontecimentos:

$$A_- = \{ X_k < 0; k = i_0, i_0+1, ..., i_0+m \},$$

ou

$$A_+ = \{ X_k > 0; k = i_0, i_0+1, ..., i_0+m \},$$

com i_0=[a/ε] e m = [(b-a)/ε]. Num abuso de linguagem, por uma questão de simplificação do texto, designaremos um intervalo de tempo correspondente aos índices i_0 a i_0+m por intervalo de tempo discreto $[i_0, i_0+m]$. Detectar um destes intervalos corresponde a testar se algum dos dois acontecimentos ocorre ou não e para isso, delineamos um teste. O raciocínio que reside a este teste é o seguinte.

Se analisarmos o modelo em tempo discreto (2.2) constatamos que $h(X)=0$ sse $X=0$ e que $h(X_k)$ "pequeno" implica, por continuidade de h, que X_k esteja próximo de zero. No entanto $h(X_k)$ não é observável, mas para ε "pequeno", aproxima-se de Y_k. Assim, Y_k é um candidato à partida como estatística do teste na detecção de passagens em zero para o processo $\{X_k\}_k$. Uma dificuldade na aplicação deste teste em relação a um teste de hipóteses clássico, diz respeito ao facto de ser aplicado numa situação de observação parcial, baseando-

se num processo observado $(\{Y_k\}_k)$ quando se pretende decidir sobre um processo não observado $(\{X_k\}_k)$.

A nossa preocupação, agora, na construção do teste será precisamente a determinação de uma fórmula para a constante $c_{obs} > 0$, designada por alguns autores como *"cutoff value"*, que corresponde ao valor crítico do teste.

Este teste, baseia-se portanto na análise da ocorrência do seguinte acontecimento:

$$C = \left\{ |Y_k| \geq c_{obs} \ ; k = i_0,...,i_0 + m \right\}$$

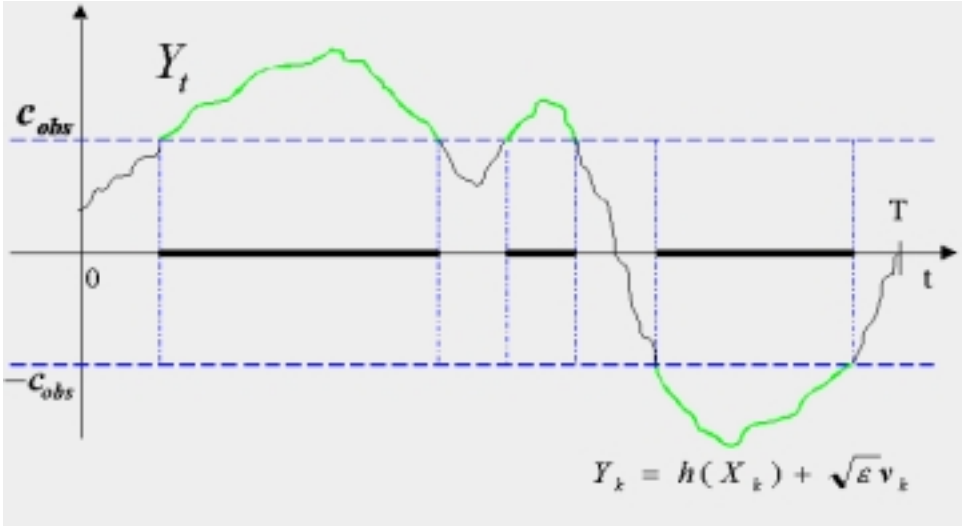

Figura 4.1 – Exemplo de aplicação do teste de detecção de passagens em zero.

Na figura 4.1 podemos observar uma trajectória do processo das observações, que obedece ao modelo (2.2), à qual se aplicou o teste. Os intervalos de tempo assinalados a negrito correspondem aos intervalos em que ocorre o acontecimento C, ou seja, aos intervalos detectados como intervalos de linearidade. Se pretendessemos estimar o estado, para este exemplo, o procedimento a seguir seria a aplicação do teste de decisão sobre o sinal aos intervalos seleccionados e posteriormente a aplicação do respectivo filtro.

Na obtenção de uma fórmula para a constante c_{obs} pretendemos minimizar a probabilidade de erro de que um cruzamento não seja detectado, a qual deverá corresponder ao valor máximo para a probabilidade condicional

$$P\left\{ \{X_k \cdot X_{k+1} < 0\} \,\middle|\, |Y_k| \geq c_{obs} \ , \ |Y_{k+1}| \geq c_{obs} \right\},$$

nos instantes $k = i_0,...,i_0 + m$. Minimizando a probabilidade de erro e fixando uma determinada probabilidade de risco α_d [2], obtém-se (ver Sousa, 1999):

[2] Nas aplicações tomaremos $\alpha_d = 5\%$.

$$c_{obs} = max(c_1, c_2), \qquad \textbf{(4.3)}$$

em que

$$c_1 = \lambda \sqrt{\varepsilon}\, \frac{\sqrt{h_+^2 h_-^2 \sigma_-^2 + h_-^2 + h_+^2 (1 + \varepsilon b_-)^2}}{\left| h_- - h_+ (1 + \varepsilon b_-) \right|}$$

e

$$c_2 = \lambda \sqrt{\varepsilon}\, \frac{\sqrt{h_+^2 h_-^2 \sigma_+^2 + h_+^2 + h_-^2 (1 + \varepsilon b_+)^2}}{\left| h_+ - h_- (1 + \varepsilon b_+) \right|}.$$

O parâmetro $\lambda>0$ é dado por $\phi(\lambda)=1-\alpha_d$, com ϕ para representar a função de distribuição da lei normal reduzida.

Os intervalos detectados por este teste determinam os instantes para uma possível estimação por um dos filtros de Kalman-Bucy, sendo para isso necessário decidir agora sobre o sinal das variáveis de estado em cada um desses intervalos de linearidade, procedimento este que abordaremos a seguir.

5. TESTES DE DECISÃO SOBRE O SINAL DO PROCESSO NÃO OBSERVADO

Após a selecção dos intervalos em que o processo de estado, para uma dada probabilidade, não apresenta passagens em zero, é necessário determinar o sinal que este tomou ou, mais concretamente, é necessário decidir sobre qual dos filtros ($\hat{X}_k^+$ ou $\hat{X}_k^-$ introduzidos na secção 3) deve ser usado em cada um desses mesmos intervalos. Tal como já adiantámos, na decisão sobre o sinal, podemos considerar dois tipos de testes, o da razão de verosimilhança e o de variação quadrática. Neste trabalho pretende-se analisar o teste de variação quadrática e compará-lo com o teste da razão de verosimilhança, para o caso da hipótese de detectabilidade (HD2), que relembramos a seguir.

(HD2): $h_-^2 \sigma_-^2 = h_+^2 \sigma_+^2$ e $b_+ \neq b_-$

Os dois tipos de testes permitem decidir sobre o sinal do processo de estado optando entre duas alternativas, que correspondem à ocorrência do acontecimento A_- ou à ocorrência do acontecimento A_+, onde

$$A_- = \{ X_k < 0; k = i_0, i_0 + 1, ..., i_0 + m \},$$
$$A_+ = \{ X_k > 0; k = i_0, i_0 + 1, ..., i_0 + m \}.$$

Os intervalos de tempo discreto $[i_0 , i_0 + m]$ considerados provêm do primeiro teste, o teste de detecção, apresentado na secção 4.

5.1. TESTE DA RAZÃO DE VEROSIMILHANÇA

Consideremos o processo das observações correspondentes a um intervalo sem passagens em zero, $\{Y_k , i_0 + 1 \le k \le i_0 + m\}$. O índice i_0 corresponde ao primeiro instante a partir do qual se iniciará a contabilização da estatística.

Pretendemos estabelecer uma estatística de teste do tipo razão de verosimilhança para decidir sobre o sinal de $\{X_k\}_{k=i_0}$ com base nas observações. De acordo com o modelo (2.2) os valores observados para o processo $\{Y_k\}_k$ seguem a equação

$$Y_k = h(X_k) + \sqrt{\varepsilon}\, v_k \quad ,$$

que pode ser reescrita sob as hipóteses A_- e A_+ da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \text{Sob} \quad A_+ : \quad & Y_k = (1 + \varepsilon\, b_+)\, X_k + \sqrt{\varepsilon}\,\dot{\Gamma}\, u_k^+ + \sqrt{\varepsilon}\, h_+ v_k^+ , \\ \text{Sob} \quad A_- : \quad & Y_k = (1 + \varepsilon\, b_-)\, X_k + \sqrt{\varepsilon}\,\dot{\Gamma}\, u_k^- + \sqrt{\varepsilon}\, h_- v_k^- , \end{aligned}$$

com $\dot{\Gamma}^2 = (\boldsymbol{h}_-\sigma_-)^2 = (\boldsymbol{h}_+\sigma_+)^2$.

Seja L_n a estatística do teste, que se define à custa do logaritmo da razão de verosimilhança das medidas de probalidade para os acontecimentos A_- e A_+ (Sousa, 1999). Para simplificar o cálculo da estatística, Oliveira-Roubaud (1995) partiram de um modelo mais simples, com passo de tempo Δt e sem ruído de observação, e deduziram-na com base numa versão discreta do Teorema de Girsanov (ver Oliveira, 1994):

$$L_n = \frac{1}{\dot{\Gamma}^2}\left[(b_+ - b_-) \sum_{k=i_0+1}^{i_0+n} Y_k (Y_{k+1} - Y_k) - \frac{1}{2}\Delta t (b_+^2 - b_-^2) \sum_{k=i_0+1}^{i_0+n} Y_k^2 \right].$$

Para o modelo (2.2), em estudo, usamos uma aproximação L_n^{ε} desta estatística com $\Delta t = \varepsilon$:

$$L_n^{\varepsilon} = \frac{b_+ - b_-}{2\dot{\Gamma}^2}(Y_{i_0+n+1}^2 - Y_{i_0+1}^2) - \frac{1}{2} n \varepsilon (b_+ - b_-) - \varepsilon \frac{b_+^2 - b_-^2}{2\dot{\Gamma}^2} \sum_{k=i_0+1}^{i_0+n} Y_k^2 \quad . \quad \textbf{(5.4)}$$

O afastamento entre as estatísticas L_n e L_n^{ε} é da ordem de grandeza [3] de $\sqrt{\varepsilon}$ (Oliveira-Roubaud, 1995). É esta estatística L_n^{ε} que tomaremos como estatístca de teste. A regra de decisão do teste é a seguinte :

- Se $L_{N^*} \geq l_2$, decide-se pelo acontecimento A_+;
- Se $L_{N^*} \leq -l_1$, decide-se pelo acontecimento A_-;
- Senão, não se decide.

Os valores $l_1 > 0$ e $l_2 > 0$ são duas constantes que forneceremos de seguida e N^* é um tempo de paragem definido por:

$$N^* = \inf\{n : L_n \geq l_2 \text{ ou } L_n \leq -l_1\} \wedge m,$$

correspondente ao número mínimo de instantes necessário para decidir sobre o sinal do estado num dado intervalo detectado.

O passo seguinte será então a determinação dos valores dos parâmetros l_1 e l_2 que nos permitem aplicar a regra de decisão. Consideremos as probabilidades de erro do tipo I, p_- e p_+[4], respeitantes à decisão sobre as hipóteses alternativas A_- e A_+:

$$\begin{cases} p_+ = P(\text{'rejeitar } A_+\text{'} \mid \text{'}A_+\text{'}) \\ p_- = P(\text{'rejeitar } A_-\text{'} \mid \text{'}A_-\text{'}) \end{cases} \qquad \textbf{(5.5)}$$

Fixando as probabilidades de erro p_+ e p_-, os valores de l_1 e l_2 resultam da resolução do sistema (não linear) seguinte (ver Oliveira-Roubaud, 1995):

$$\begin{cases} p_+ = \dfrac{1 - e^{-l_2}}{e^{l_1} - e^{-l_2}} \\ p_- = \dfrac{1 - e^{-l_1}}{e^{l_2} - e^{-l_1}}. \end{cases} \qquad \textbf{(5.6)}$$

Como podemos constatar a solução deste sistema é independente dos parâmetros do modelo, isto é, os valores de l_1 e l_2 dependem apenas dos valores de erro admitidos para o teste.

O sistema de equações (5.6) por si só pode ter várias soluções e terá de ser resolvido numericamente. Do ponto de vista prático, para $p_+ = p_- = \alpha_s$, a dificuldade de obtenção de uma solução adequada do sistema (5.6) pode ser ultrapassada procurando uma solução em que $l_1 = l_2$. Nessa altura facilmente se verifica que:

---

[3] **Notação 1 –** Para um dado processo $\{G_k\}$ considera-se que $G_k = O(\varepsilon^q)$, onde $q \in \Re_+$, para significar que existem $c_1, c_2, c_3 > 0$ tais que

$$E\left[G_k^2\right] \leq c_1 \exp\{-c_2 k\varepsilon\} + c_3 \varepsilon^{2q}, \forall k \in N, \varepsilon > 0.$$

[4] Em geral considera-se, na prática, $p_+ = p_- = 0.05$.

$$l_1 = l_2 = \ln \frac{1 - \alpha_s}{\alpha_s} \quad .$$

Esta solução foi adoptada em Oliveira-Roubaud (1995) com sucesso e será também adoptada neste estudo. Por exemplo, para $\alpha_s = 0.05$ obtém-se $l_1 = l_2 = 2.94$.

Veremos também que, do ponto de vista prático, é recomendável considerar como primeiro instante de cálculo da estatística de teste não o índice i_0 mas sim um índice ligeiramente posterior [5]. Esta pequena alteração em nada altera o espírito do teste. O seu efeito é apenas o de evitar pequenas instabilidades que possam ocorrer quando o sistema ainda esteja a "entrar num intervalo de linearidade". Esta observação também é válida para o teste de variação quadrática, cujo procedimento analisamos na secção seguinte.

5.2. TESTE DE VARIAÇÃO QUADRÁTICA

Com o intuito de introduzir a estatística para este teste comecemos por considerar as seguintes notações:

$$\Delta_k^+ = Y_{k+1} - (1 + b_+ \varepsilon) Y_k ,$$
$$\Delta_k^- = Y_{k+1} - (1 + b_- \varepsilon) Y_k ,$$

e vejamos qual a ideia que preside ao teste de variação quadrática.

No caso de se ter $X_k > 0$ e $X_{k+1} > 0$ (acontecimento A_+), estes processos são dados pelas seguintes expressões :

$$\Delta_k^+ = h_+ \sigma_+ \sqrt{\varepsilon}\, u_k + \sqrt{\varepsilon}\, v_{k+1} - (1 + b_+ \varepsilon) \sqrt{\varepsilon}\, v_k ,$$
$$\Delta_k^- = h_+ (b_+ - b_-) \varepsilon X_k + h_+ \sigma_+ \sqrt{\varepsilon}\, u_k + \sqrt{\varepsilon}\, v_{k+1} - (1 + b_- \varepsilon) \sqrt{\varepsilon}\, v_k ,$$

expressões essas que decorrem do próprio modelo (2.2). No caso de ocorrer $X_k < 0$ e $X_{k+1} < 0$ (acontecimento A_-), obtém-se:

$$\Delta_k^+ = h_- (b_- - b_+) \varepsilon X_k + h_- \sigma_- \sqrt{\varepsilon}\, u_k + \sqrt{\varepsilon}\, v_{k+1} - (1 + b_+ \varepsilon) \sqrt{\varepsilon}\, v_k ,$$

$$\Delta_k^- = h_- \sigma_- \sqrt{\varepsilon}\, u_k + \sqrt{\varepsilon}\, v_{k+1} - (1 + b_- \varepsilon) \sqrt{\varepsilon}\, v_k .$$

Analisando estas expressões facilmente concluímos que, se o acontecimento A_+ ocorre, a variável aleatória Δ_k^+ tem distribuição $\mathrm{N}(0, \Gamma_+^2 \varepsilon)$ e se o acontecimento A_- ocorre, a variável aleatória Δ_k^- tem distribuição $\mathrm{N}(0, \Gamma_-^2 \varepsilon)$, sendo

[5] Nos exemplos de aplicação que apresentamos no capítulo 6 consideramos, de um modo geral, i_0 incrementado de 6 unidades.

$$\Gamma_+^2 = h_+^2\sigma_+^2 + 1 + (1 + b_+\varepsilon)^2 \quad \text{e} \quad \Gamma_-^2 = h_-^2\sigma_-^2 + 1 + (1 + b_-\varepsilon)^2 .$$

Podemos então dizer que a decisão entre as alternativas A_- e A_+ nos conduz naturalmente a um teste de hipóteses sobre as variâncias das variáveis aleatórias Δ_k^- e Δ_k^+. Note-se que $\Gamma_+^2 - \Gamma_-^2 = O(\varepsilon)$ (ver nota de rodapé (3)), logo não será surpreendente se chegarmos a um teste que necessita de um tempo longo para tomar uma decisão.

Considere-se a razão das respectivas funções de densidade (gaussianas) :

$$Z_k = \ln\left(\frac{f_N(\Delta_k^+, 0, \Gamma_+^2\varepsilon)}{f_N(\Delta_k^-, 0, \Gamma_-^2\varepsilon)} \right).$$

Ela permite definir a seguinte estatística :

$$S_n = \sum_{k=i_0}^{i_0+n} Z_k ,$$

com $0 \le n \le m$. Desenvolvendo a razão Z_k obtém-se :

$$Z_k = \ln\left(\frac{\Gamma_-}{\Gamma_+} \right) + \frac{1}{2\varepsilon}\left(\frac{\Delta_k^{-2}}{\Gamma_-^2} - \frac{\Delta_k^{+2}}{\Gamma_+^2} \right)$$

e portanto

$$S_n = (n+1)\ln\left(\frac{\Gamma_-}{\Gamma_+} \right) + \frac{1}{2\varepsilon}\sum_{k=i_0}^{i_0+n}\left(\frac{\Delta_k^{-2}}{\Gamma_-^2} - \frac{\Delta_k^{+2}}{\Gamma_+^2} \right). \qquad \textbf{(5.7)}$$

Construída a estatística de teste, S_n, falta agora determinar a região crítica para a estatística, que é calculada atendendo às probabilidades de erro consideradas, p_- e p_+[6], definidas como na secção anterior (ver (5.5)).

Seja $[-l_1, l_2]$, com $l_1 > 0$ e $l_2 > 0$, a região crítica para a estatística S_n, que é construída para um erro do tipo I, α_s. Os valores para l_1 e l_2 podem ser determinados aproximadamente se em (5.5) substituirmos os segundos membros por expressões aproximadas. Temos então o seguinte sistema de equações não linear:

---

[6] Em geral consideraremos $p_+ = p_- = 0.05$.

$$\begin{cases} p_+ = \dfrac{1-e^{-\left(\mu_+ / \gamma_+^2\right) l_2}}{e^{\left(\mu_+ / \gamma_+^2\right) l_1} - e^{-\left(\mu_+ / \gamma_+^2\right) l_2}} \\ p_- = \dfrac{1-e^{-\left(\mu_- / \gamma_-^2\right) l_1}}{e^{-\left(\mu_- / \gamma_-^2\right) l_2} - e^{-\left(\mu_- / \gamma_-^2\right) l_1}}, \end{cases} \qquad \textbf{(5.8)}$$

em que

$$\mu_+ = \ln\left(\frac{\Gamma_-}{\Gamma_+}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\Gamma_-^2} - \frac{1}{\Gamma_+^2}\right)\Gamma_+^2 ,$$
$$\mu_- = \ln\left(\frac{\Gamma_-}{\Gamma_+}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\Gamma_-^2} - \frac{1}{\Gamma_+^2}\right)\Gamma_-^2 ,$$

$$\gamma_+ = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\Gamma_-^2} - \frac{1}{\Gamma_+^2}\right)\sqrt{\Gamma_+^4 + 2(1 + b_+\varepsilon)^2} ,$$
$$\gamma_- = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\Gamma_-^2} - \frac{1}{\Gamma_+^2}\right)\sqrt{\Gamma_-^4 + 2(1 + b_-\varepsilon)^2} .$$

A maneira como estas expressões são deduzidas assim como detalhes sobre a construção do teste são apresentados em Oliveira (2000).

Podemos agora estabelecer a regra de decisão para o teste (de variação quadrática) :

- Se $S_{N^*} \le -l_1$, decidir pelo acontecimento A_-;
- Se $S_{N^*} \ge l_2$, decidir pelo acontecimento A_+;
- Caso contrário, não decidir,

onde N^* é um tempo de paragem definido da mesma forma que no teste anterior (secção 5.1), agora para a estatística S_n.

Dado que pretendemos comparar o comportamento dos testes, torna-se interessante caracterizar a performance do teste em termos do tempo necessário para atingir uma decisão, razão pela qual medimos aquilo a que chamaremos o tempo médio de espera para uma decisão. Considerando os tempos de paragem N^+ e N^- que representam a variável aleatória N^* sob as hipóteses A_+ e A_- respectivamente, definimos os correspondentes tempos de espera $T^+ = N^+\varepsilon \quad e \quad T^- = N^-\varepsilon$ contabilizados no intervalo de tempo contínuo [0,T]. Oliveira-Roubaud (1995) e Oliveira (2000) apresentam fórmulas aproximadas para os tempos de paragem T^+ e T^-.

Voltando ao sistema de equações não linear (5.8), convém notar que a determinação da sua solução, de um ponto de vista prático, não é imediata. De facto esta tem geralmente de ser obtida por métodos numéricos, de entre os métodos habitualmente usados para resolução de sistemas não lineares com os inconvenientes que tão bem conhecemos. Existe em geral um conjunto de soluções possíveis e aproximadas, ficando o sucesso do teste muito dependente

da escolha de uma solução inicial para $-l_1$ e l_2 no arranque do método numérico. Por outro lado, não temos garantia do sistema ter sempre solução e por vezes, quando existe mais do que uma solução, torna-se necessário optar pelo par de valores (l_1, l_2) mais "adequado". Como seria de esperar os resultados do teste são muito sensíveis aos parâmetros l_1 e l_2 e por isso torna-se conveniente determinar um procedimento para a sua determinação na prática. No caso da hipótese (HD1) Fleming *et al.* (1991) contornaram esta dificuldade usando a seguinte aproximação:

$$l_1 = -\left|\frac{1}{\theta_+}\right| \log(\alpha_s) \quad \text{e} \quad l_2 = -\left|\frac{1}{\theta_-}\right| \log(\alpha_s),$$
$$\text{com} \quad \theta_+ = \frac{\mu_+}{\gamma_+} \quad \text{e} \quad \theta_- = \frac{\mu_-}{\gamma_-}. \qquad \textbf{(5.9)}$$

Estas aproximações foram testadas em alguns exemplos de aplicação e revelaram-se eficazes no caso da hipótese (HD1). Infelizmente, como veremos mais à frente (secção 6), o mesmo não se pode dizer para a hipótese (HD2). Os resultados numéricos que o ilustram são apresentados na secção 6.

6. EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

Esta secção é dedicada ao estudo numérico do comportamento dos testes de decisão sobre o sinal. O principal objectivo consiste em analisar o desempenho do teste de variação quadrática, na decisão sobre o sinal do estimador a aplicar, e compará-lo com o teste da razão de verosimilhança quando se verifica a hipótese (HD2). Para isso, recorreremos à simulação numérica de alguns exemplos de modelos.

A análise baseia-se em 100 trajectórias geradas, para cada exemplo, num intervalo de tempo contínuo [0,15], o que, para ε =0.01, corresponde a considerar uma partição em 1500 instantes de tempo discreto (K=1500). A simulação dos processos de estado e observações foi feita partindo da condição inicial $X_0 \sim N(-5, 0.1)$.

A performance dos testes é medida através das percentagens de instantes em que os testes actuam e das percentagens de erro na decisão sobre o sinal para o processo não observado. As probabilidades de erro são comparadas com as frequências de decisões erradas encontradas nas simulações, pe_v e pe_{vq}. Para o cálculo destas frequências consideram-se apenas os intervalos em que efectivamente não houve cruzamentos em zero, independentemente de estarem ou não bem detectados pelo primeiro teste. Os testes de decisão sobre o sinal são ainda analisados tendo em conta os tempos médios de paragem, que correspondem aos tempos (minímos) de que, em média, um teste precisa para decidir. A análise dos tempos de paragem permite-nos comparar a rapidez de decisão dos testes ou até mesmo analisar o efeito dos parâmetros do modelo na rapidez de decisão. Nesta secção apresentamos alguns dos resultados mais importantes, sob a forma de tabela ou gráfico. Para valores mais detalhados poderão consultar Sousa (1999).

Nesta secção serão utilizadas as seguintes notações:

α_d: nível de significância para o teste de detecção de passagens em zero.

α_s: nível de significância para o teste de decisão sobre o sinal.

$-l_1, l_2$: valores críticos para a estatística do teste de decisão sobre o sinal.

pe_v, pe_{vq} : percentagens de erro nos testes da razão de verosimilhança e de variação quadrática, para decisão sobre o sinal.

pid_v, pid_{vq} : percentagens de instantes de decisão para os testes da razão de verosimilhança e de variação quadrática.

ET_v^-, ET_v^+ : médias teóricas do tempo necessário para decisão no teste de verosimilhança.

$\overline{T}_v^-, \overline{T}_v^+$: médias (empíricas) do tempo necessário para decisão no teste da razão de verosimilhança.

ET_{vq}^-, ET_{vq}^+ : médias teóricas do tempo necessário para decisão no teste de variação quadrática.

$\overline{T}_{vq}^-, \overline{T}_{vq}^+$: médias (empíricas) do tempo necessário para decisão no teste de variação quadrática.

i_0 : instante a partir do qual se começa a contabilizar a estatística do teste de decisão [7].

No caso do teste da razão de verosimilhança, a solução $l_1 = l_2 = \ln\left(\frac{1-\alpha_s}{\alpha_s}\right)$ do sistema de equações não lineares apresentado no secção 5 (sistema 5.6) é adequada ao nosso problema (Oliveira-Roubaud, 1991). Para uma probabilidade de erro $\alpha_s = 0.05$ obtém-se $l_1 = l_2 = 2.94$. No caso do teste de variação quadrática esses valores dependerão dos parâmetros do modelo. Veremos a seguir que nos deparamos com algumas dificuldades quando pretendemos obter uma boa solução para o par (l_1, l_2), tendo mesmo que recorrer a métodos de aproximação numérica (como por exemplo, a função 'fsolve' da linguagem de programação Matlab que permite a resolução numérica de sistemas não lineares). As duas figuras que se seguem ilustram bem a importância de uma boa escolha para l_1 e l_2 como soluções de (5.8). Nas Figuras 6.1 e 6.2 estão representados os resultados para o teste de variação quadrática com duas soluções diferentes para os parâmetros l_1 e l_2, para uma mesma trajectória do processo de estado. Estes valores foram obtidos numericamente através da função 'fsolve' do Matlab.

---

[7] Conforme foi mencionado na secção 5.1, dado que estes testes assentam sobre condições de estacionaridade considerou-se i_0 incrementado em 6 unidades. No entanto alguns ensaios foram realizados com i_0 incrementado de 11 unidades, de modo a estudar a sensibilidade do teste relativamente a este parâmetro.

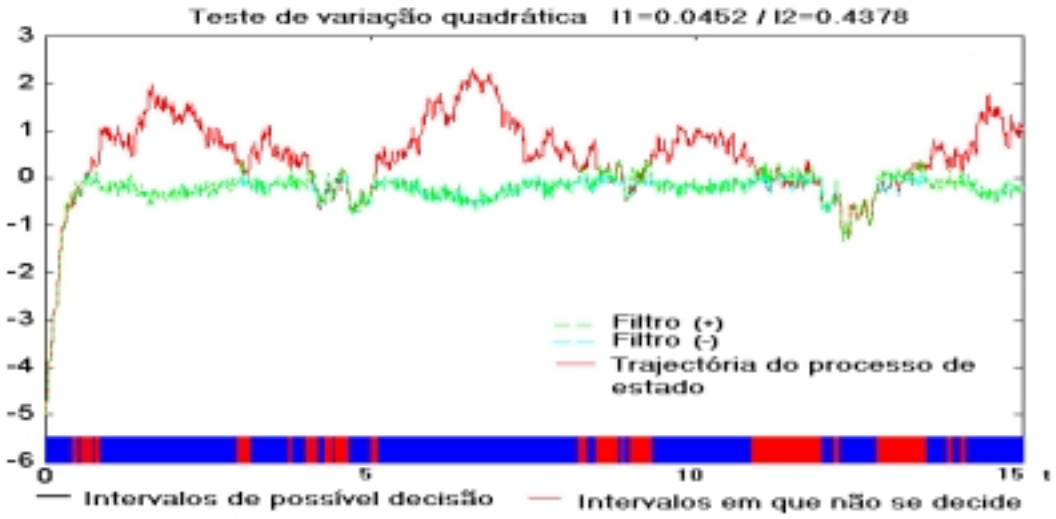

Figura 6.1 - Resultado da filtragem aplicando o teste de variação quadrática, em que $l_1 = 0.0452$, $l_2 = 0.4378$.

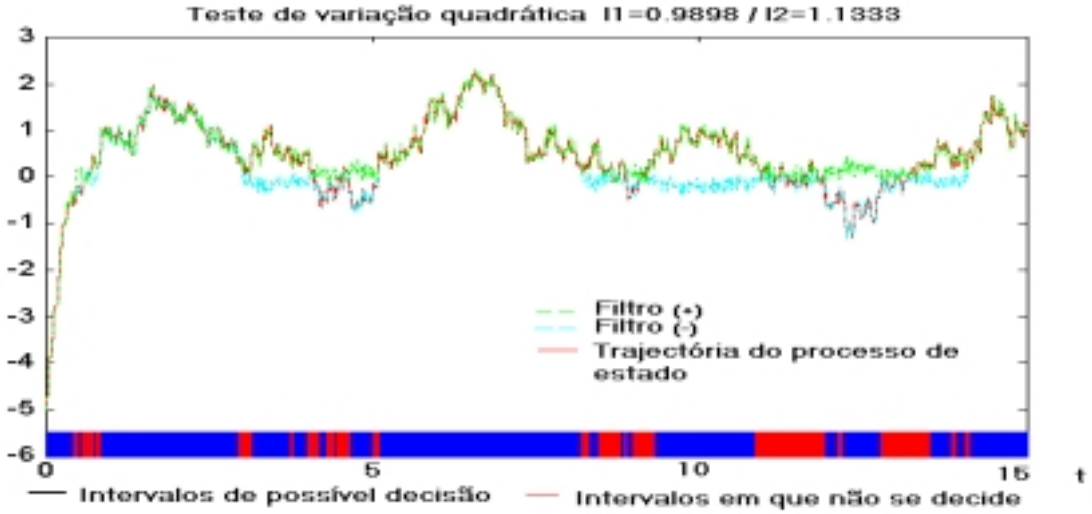

Figura 6.2 - Resultado da filtragem aplicando o teste de variação quadrática, em que $l_1 = 0.9898,\quad l_2 = 1.1333$

A zona identificada com barra preta corresponde aos intervalos seleccionados pelo teste de deteccção de passagens em zero. A trajectória do processo de estado está representada a contínuo, sendo os filtros $^{(FKB)^+}$ e $^{(FKB)^-}$ representados a tracejado em tons mais claros. Nos instantes em que estes traços coincidem, significa que foi tomada uma decisão e, se eles seguirem a trajectória do processo de estado, a decisão foi correcta.

Na Figura 6.1, verificamos que o teste de variação quadrática decidiu em praticamente todos os intervalos de detecção e quase sempre de forma errada. O facto do valor l_1 estar muito próximo de zero faz com que o teste decida muitas vezes pelo sistema (-), sem que corresponda à realidade. Para este modelo, na simulação de 100 trajectórias, incluindo a da figura, obteve-se um erro na decisão muito superior a 5%. Podemos assim concluir que os valores $l_1 = 0.0452$ e $l_2 = 0.04378$ não conduzem a bons resultados de estimação. Vejamos agora o que se passa se escolhermos um outro par de valores (l_1, l_2) (ver Figura 6.2). Neste exemplo, uma abordagem do sistema de equações (5.8) análoga à sugerida em Fleming *et al.*

(1991) para os modelos sob a hipótese (HD1) (ver expressão (5.9)) permite encontrar valores de l_1 e l_2 mais equilibrados e que dão origem a probabilidades de erro do tipo I inferiores a 5% (a saber $p_+ = 0$ e $p_- = 0.0413$). A simples alteração dos parâmetros l_1 e l_2 proporcionou um funcionamento adequado do teste, muito semelhante ao do teste da razão de verosimilhança, decindo correctamente pelo filtro (+) em intervalos em que anteriormente não decidia.

Do ponto de vista prático, nem sempre é fácil encontrar soluções para os parâmetros l_1 e l_2, que conduzem a probabilidades de erro adequadas. Há que ensaiar diferentes alternativas, partindo do que foi sugerido por Fleming *et al.* (1991).

Passamos agora ao estudo do comportamento dos testes em alguns exemplos (casos 1 a 4). Comecemos por considerar o modelo (2.2) com os seguintes parâmetros:

$$\begin{cases} b_+ = -0.01, b_- = -0.5 \\ h_+ = 1, h_- = -1 \\ \sigma_+ = 1, \sigma_- = 1 \end{cases} \qquad \textbf{(Caso 1)}$$

Os resultados de aplicação dos testes estão resumidos na Tabela 6.1. Para este exemplo de aplicação, obteve-se uma percentagem de erro na decisão do teste da razão de verosimilhança muito semelhante à do teste de variação quadrática (6.56% e 6.82%, respectivamente). As percentagens de instantes de tempo com decisões também foram muito semelhantes (44.46% e 41.79%, respectivamente). Vejamos o que se passa se neste exemplo se aumentar a diferença entre os parâmetros b_- e b_+. Consideremos assim dois exemplos com as seguintes alterações no parâmetro b_-:

$$b_- = -1 \qquad \textbf{(Caso 2)}$$

$$b_- = -4 \qquad \textbf{(Caso 3)}$$

Da análise da Tabela 6.1 retiramos que, ao aumentar $|b_+ - b_-|$ se obteve uma maior percentagem de instantes de decisão (pid_v e pid_{vq}) e, por outro lado, uma diminuição no erro da decisão (pe_v e pe_{vq}), para ambos os testes. O facto da decisão ser mais rápida nestes últimos casos pode também ser constatado através dos valores médios empíricos $\overline{T}_v^-, \overline{T}_v^+$ e $\overline{T}_{vq}^-, \overline{T}_{vq}^+$ que diminuiram consideravelmente. Note-se que é natural esperar que o aumento da distância entre os parâmetros b_- e b_+ facilite a decisão sobre o sinal nesses intervalos, uma vez que quanto maior $|b_+ - b_-|$ mais rapidamente os valores das variáveis de estado se afastam do limiar zero.

Casos	b_-	b_+	pid_v	pid_{vq}	pe_v	pe_{vq}	$\overline{T}_v^-$	$\overline{T}_v^+$	$\overline{T}_{vq}^-$	$\overline{T}_{vq}^+$
1	-0.5	-0.01	41.46%	41.79%	6.56%	6.82%	1.2	2.68	1.46	6.66
2	-1	-0.05	47.21%	34.74%	3.95%	4.41%	0.42	1.44	0.67	3.86

3	-4	-0.05	61.36%	58.77%	4.77%	4.59%	0.09	0.37	0.17	0.5

Tabela 6.1 – Resultados de decisão nos testes da razão de verosimilhança e de variação quadrática para diferentes valores de b_- e b_+.

O mesmo acontece, relativamente à detecção de intervalos sem passagens em zero.

Comparando os dois testes de decisão sobre o sinal, entre si, verificamos que, embora as percentagens de erro sejam semelhantes em ambos os testes, os tempos médios de decisão para o teste de variação quadrática são ligeiramente superiores.

Tentemos agora analisar o efeito da quantidade $\dot{\Gamma}^2 = (\sigma_- h_-)^2 = (\sigma_+ h_+)^2$ no comportamento dos testes. Se analisarmos a estatística utilizada no teste de razão de verosimilhança (expressão (5.4)) podemos constatar que as alterações em $\dot{\Gamma}^2$ deverão influenciar muito os valores da estatística. Retomando o caso 2, em que $(\sigma_- h_-)^2 = (\sigma_+ h_+)^2 = 1$, vejamos o que sucede se diminuirmos esta quantidade. Consideremos um novo exemplo em que apenas se diminui o valor $(\sigma_- h_-)^2 = (\sigma_+ h_+)^2$:

$$\begin{cases} \sigma_- = 1,\ h_- = -0.8 \\ \sigma_+ = 1,\ h_+ = 0.8 \end{cases}$$

(Caso 4)

Os resultados são apresentados na tabela seguinte:

Casos	h_-	h_+	σ_-	σ_+	pid_v	pid_{vq}	pe_v	pe_{vq}	$\overline{T}_v^-$	$\overline{T}_v^+$	$\overline{T}_{vq}^-$	$\overline{T}_{vq}^+$
2	-1	1	1	1	47.21%	34.74%	3.95%	4.41%	0.42	1.44	0.67	3.86
4	-0.8	0.8	1	1	45.06%	25.98%	8.56%	1.72%	0.32	1.37	1.23	5.3

Tabela 6.2 – Resultados de decisão nos testes da razão de verosimilhança e de variação quadrática, para diferentes funções $\sigma h(x_k)$ ($b_- = -1, b_+ = -0.05$).

Enquanto que para $\dot{\Gamma}^2 = 1$ (caso 2) se obtiveram decisões em 47.21% dos instantes e erro em 3,95% das decisões, para $\dot{\Gamma}^2 = 0.64$ (caso 4) obtiveram-se decisões em $pid_v = 45.06\%$ dos instantes e $pe_v = 8.56\%$ de decisões erradas. Quanto ao teste de variação quadrática, verificou-se uma diminuição na frequência de decisões erradas (4.4% e 1.7% respectivamente).

A diminuição da quantidade $|h_-| = |h_+|$ provoca uma diminuição na grandeza dos valores observados reduzindo ligeiramente a percentagem de instantes que verificam o acontecimento C do teste de detecção. Por outro lado, a estatística do teste da razão de verosimilhança necessita de um menor número de instantes de tempo para atingir os valores críticos, mas vem acompanhada de um aumento do erro de decisão pe_v. Verificámos ainda que, se $\dot{\Gamma}^2 = (\sigma_- h_-)^2 = (\sigma_+ h_+)^2$ aumenta consideravelmente este teste toma decisões erradas

com maior frequência revelando um mau comportamento na prática. Uma razão para este comportamento poderá estar em que quando $\dot{\Gamma}^2$ aumenta, o termo principal da estatística deste teste (ver (5.7)) diminui de peso. No entanto, o primeiro termo, que nestes casos é sempre negativo, assume maior importância levando por vezes a decisões precipitadas. O facto da estatística atingir o valor $-l_1$, quando as variáveis estão do lado positivo, leva a concluir que, nestes casos, o teste poderá não ser tão eficaz. Como verificámos que a performance do teste está muito relacionada com a maneira como são determinados os valores de l_1 e l_2, enveredámos esforços para obter outros valores possíveis para estas constantes o que se revelou infrutífero. Não quer isto dizer, evidentemente, que eles não existam mas sim que seria necessário uma investigação especificamente com este propósito do âmbito da análise numérica. Esta situação mostra que, na prática, é necessário ter em atenção as características dos modelos e verificar, por via da simulação, se o teste de facto permite obter bons resultados quando aplicado. Pelos exemplos que foram testados constata-se que, aparentemente, quando $|\sigma_- h_-| = |\sigma_+ h_+|$ é elevado (ultrapassa a unidade) torna-se problemática a aplicação do teste de variação quadrática, sendo nesses casos aconselhável dar preferência ao outro teste de decisão.

Se por um lado o teste de variação quadrática tem algumas limitações em termos de aplicação, por outro lado este teste revela-se mais eficaz nos intervalos próximos de zero que ainda correspondem a intervalos detectados. Em geral o teste de variação quadrática toma mais frequentemente decisões nessas zonas, comparativamente ao teste da razão de verosimilhança. Este comportamento é ilustrado nas Figuras 6.3 e 6.4 relativas ao caso 3. Destacaram-se duas regiões (Zoom1 e Zoom2, Figura 6.5) para, nesta escala de cinza, facilitar a vizualização dos filtros quando não há decisão de sinal e, por consequência, não há estimação de estado.

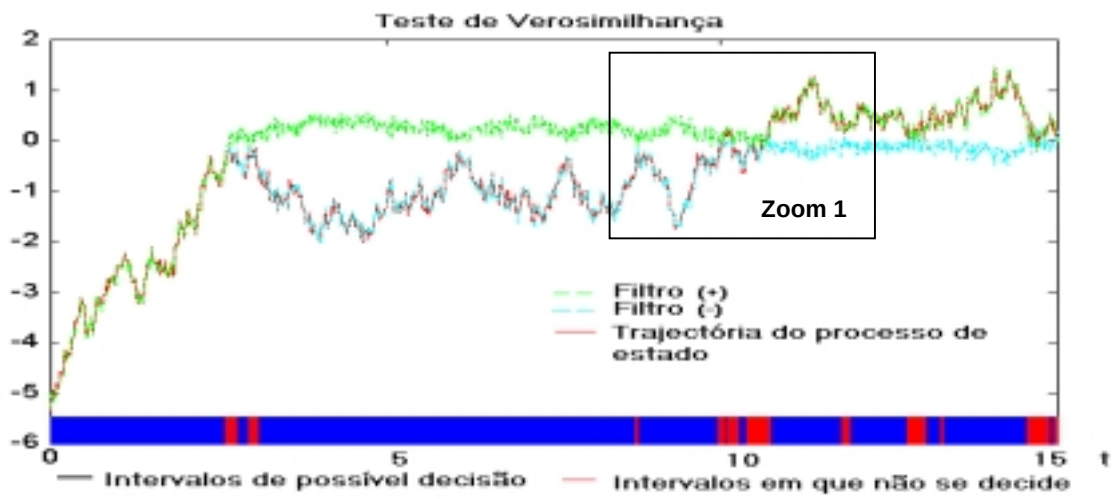

Figura 6.3 – Resultado da filtragem utilizando o teste de verosimilhança para uma trajectória do caso 3.

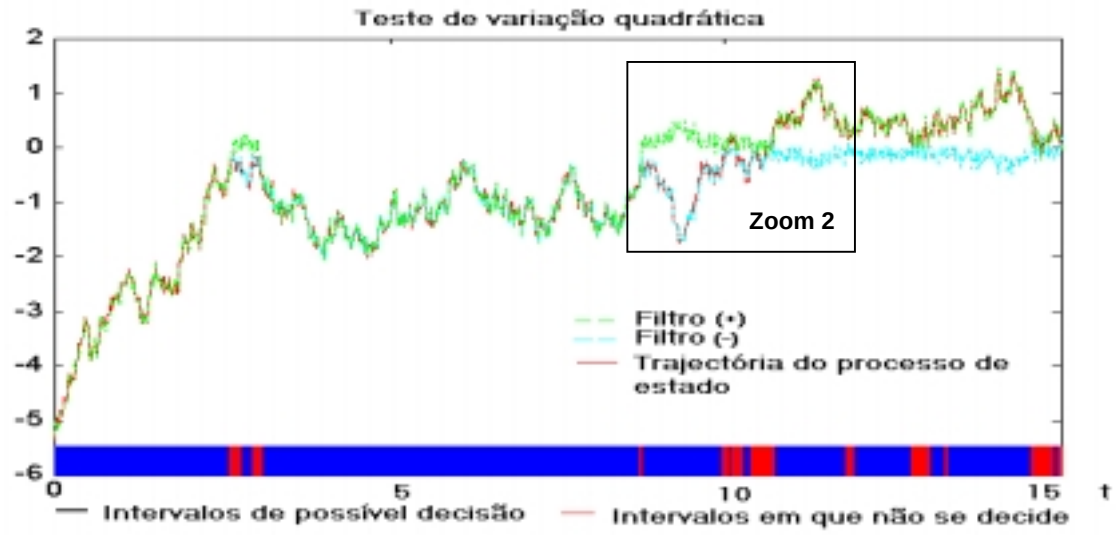

Figura 6.4 – Resultado da filtragem utilizando o teste de variação quadrática para uma trajectória do caso 3.

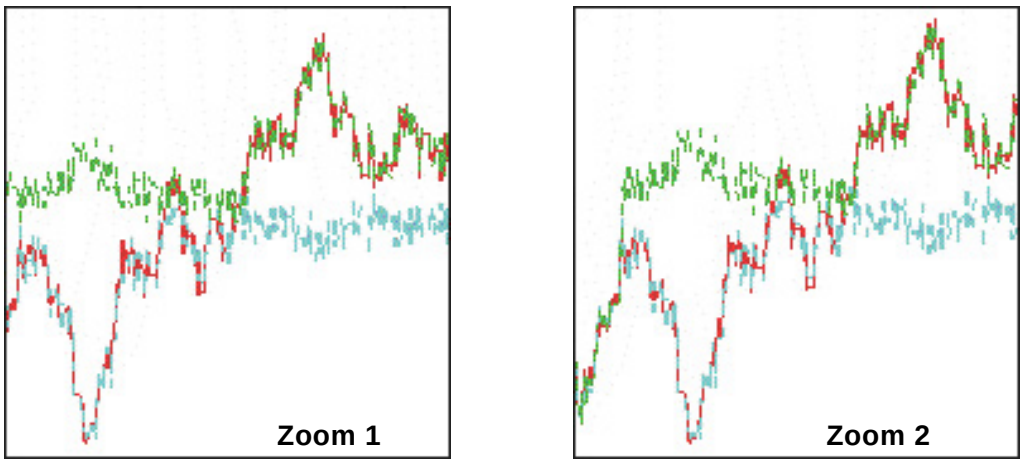

Figura 6.5 – Ampliações das regiões Zoom1 e Zoom2 das figuras 6.3 e 6.4.

Como podemos ver, em ambos os testes de decisão sobre o sinal, existem zonas no intervalo de tempo contínuo [10,15] onde o teste é aplicado mas não pemite tomar uma decisão (nesses intervalos a estatística não chega a atingir os limites $-l_1$ e l_2). Para os instantes anteriores a t =10, pode-se destacar na Figura 6.4 um intervalo longo, identificado com barra a preto, onde o teste de variação quadrática conduz a uma decisão o que não acontece com o teste da razão de verosimilhança (Figura 6.3). O teste de variação quadrática opta correctamente pelo filtro do lado negativo nesse intervalo. Este é apenas um exemplo dos muitos em que situações como esta ocorrem. De facto, em zonas de detecção mais próximas de zero o teste de variação quadrática, se encontrar um intervalo suficientemente longo para poder decidir, parece funcionar melhor do que o teste da razão de verosimilhança. Podemos dizer que este último tem geralmente melhor desempenho do que o teste de variação quadrática por estar menos sujeito a decisões erradas, mas perde performance no que respeita à percentagem de decisões tomadas.

7. CONCLUSÕES

Ao longo deste trabalho pretendeu-se analisar os modelos de Markov escondidos unidimensionais lineares por bocados em tempo discreto, numa perspectiva de estimação do processo de estado não observado. Mediante uma hipótese de detectabilidade sobre o modelo, os estimadores tradicionais (Filtro de Kalman-Bucy) permitem estimar o estado, desde que precedidos da aplicação de uma sequência de dois testes estatísticos. Foram estudados o teste de detecção de passagens em zero e dois testes de decisão sobre o sinal para o processo das observações, atendendo à hipótese de detectabilidade (HD2). Sob esta hipótese, compara-se o desempenho do teste de variação quadrática, na decisão sobre o sinal, com o teste da razão de verosimilhança.

Confirmámos os resultados obtidos por Oliveira-Roubaud (1995) segundo os quais o teste de razão de verosimilhança pode ser usado com sucesso no procedimento de estimação do estado. Verificámos que o teste de variação quadrática não é geralmente melhor do que o anterior mas permite-nos por vezes obter estimativas em intervalos de tempo em que o teste da razão de verosimilhança não toma uma decisão, como é o caso de intervalos com poucos instantes ou em que o processo de estado toma valores muito próximos de zero. Verificámos no entanto existirem exemplos em que o teste de variação quadrática não fornece bons resultados e dificilmente cumpre os níveis de erro exigidos. Não se aconselha portanto a aplicação do teste de variação quadrática sem prévia verificação do comportamento sob simulação. Aparentemente o seu mau desempenho acontece quando estão em causa valores elevados para $(\sigma h)^2$. Um estudo mais demorado, com um número muito maior de simulações e um passo de tempo inferior seria necessário para averiguar das razões do aparecimento de valores de erro mais elevados e verificar se, de facto, são significativamente diferentes de 5%. Concluimos também que o comportamento dos testes está muito dependente dos valores encontrados para os parâmetros l_1 e l_2 (valores críticos da estatística do teste) e seria necessário realizar um estudo numérico aprofundado para melhorar a determinação destes parâmetros (que resultam da resolução de um sistema de equações não linear). A aproximação sugerida por Fleming et al (1991) (ver expressão 5.9) nem sempre se revelou adequada para os modelos que verificam a hipótese de detectabilidade (HD2), embora se considere que a expressão é adequada para uso nos modelos em que se verifica a hipótese (HD1). A qualidade dos testes deveria melhorar consideravelmente se utilizássemos um passo de tempo inferior ao utilizado para a discretização do modelo (2.2), o que acarretaria no entanto uma grande sobrecarga em termos computacionais.

AGRADECIMENTOS

Ao Instituto Nacional de Estatatística, em especial ao Professor Doutor Paulo Gomes, pelo interesse e apoio demonstrados para a publicação deste artigo. À Prof. Doutora Paula Milheiro Oliveira, docente na Faculdade de Engenharia da UP, pela sua disponibilidade para sugestões e comentários que se revelaram extremamente úteis.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANDREWS, ANGUS P. e GREWAL, MOHINDER S. (1993). *Kalman Filtering, Theory and Practice*, Prentice Hall, New Jersey.

FLEMING, W. H. e PARDOUX, E. (1989). *Piecewise monotone filtering with small observation noise*, SIAM J. Control and Optimization, vol. 27, No. 5, pp. 1156-1181.

FLEMING, W. H, JI, D. e PARDOUX, E. (1988). *Piecewise linear filtering with small observation noise*, Proc. 8th Int. Conf. on Analysis and Optim. Of Systems, Antibes 1988, Lect, No. 111, pp. 725-739, Springer, 1988.

FLEMING, W. H., JI, D., SALAME, P. e ZHANG, Q. (1991). *Piecewise monotone filtering in discrete-Time with small observation noise*, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 10, No. 10, pp 1181-1186.

HARVEY, ANDREW C. (1989). *Forecasting, Structural time series models and Kalman filter*, Department of Statistical and mathematical Sciences, London.

JAZWINSKI, ANDREW H. (1970). *Stochastic processes and filtering theory*, Academic Press.

KALMAN, R. E. e BUCY, R. S. (1961). *New results in linear filtering and prediction theory*, J. Basic Eng., vol. 83, pp. 95-108.

OLIVEIRA, P. MILHEIRO (1994). *Uma Versão discreta do Teorema de Girsanov*, II Congresso Anual da Sociedade Portuguesa de Estatística, Luso, pp. 211-217.

OLIVEIRA, P. MILHEIRO E ROUBAUD, MARIE-CHRISTINE (1991). *Filtrage lineaire par morceaux d'un systeme en temps discret avec petiti bruit d'observation*, Unité de Recherche, INRIA-Sophia Antipolis, No. 1451.

OLIVEIRA, P. MILHEIRO e ROUBAUD, M. C. (1995). *Discrete-Time piecewise linear filtering with small observation noise*, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 40, No. 12, pp 2149-2152.

OLIVEIRA, P. MILHEIRO (2000). *A sequential method for the estimation of a partially observed piecewice AR(1) process*, pp 1-5 (*preprint*).

PARDOUX, E. e ROUBAUD, M.C. (1991), *Finite dimensional approximate filters in the case of high signal-to-noise ratio*, Conference on the Memory of Zakai, Haifa.

PICARD, J. (1986). *Nonlinear filtering of one-dimensional diffusions in the case of a high signal-to-noise ratio*, SIAM J. APPL. MATH., vol. 46, No. 6, pp. 1098-1125.

PICARD, J. (1991). *Efficiency of the extended Kalman filter for non linear systems with small noise*, , SIAM J. APPL. MATH, (51), 3, pp. 843-855.

ROUBAUD, M. C. (1992). *An approximate filter for a partially observed piecewise linear system with small observation noise*, Systems & Control Letters, North-Holland, No. 20, pp. 239-247.

ROUBAUD, M. C. (1995). *Filtrage linéaire par morceaux avec petiti bruit d'observation*, Applied Mathematics Optimization, Springer-Verlag, New York, No. 32, pp. 163-194.

SORENSON, H. W. (1985). *Kalman Filtering: Theory and application*, Department of Applied Mechanics and Engineering Sciences, University of California, San Diego.

SOUSA, RITA C. P. (1999). *Estimação de estado em modelos lineares por bocados parcialmente observados: comparação numérica de dois testes*, Relatório da Tese de Mestrado em Estatística, Dep. Matemática Aplicada, F.C.U.P.

TONG, HOWELL e YEUNG, IRIS (1989). *On tests for self-exciting threshold autoregressive-type non-linearity in partially observed time series*, University of Kent at Canterbury, UK.